A top-down view of a pond. The water is dark, and the surface is covered with large, round, green lily pads. In the center-left, a single white water lily flower is in full bloom, showing a bright yellow center. To the right and bottom right, there are several yellow water lily buds and partially open flowers. The overall scene is lush and natural.

LABERINTOS & INFINITOS

PRIMAVERA **2021**

ÍNDICE

Editorial	2
MATEMÁTIC@ DEL NÚMERO	
Grigori Perelman	3
AXIOMAS, TEOREMAS Y ALGO MÁS	
NASCAR y la geometría diferencial	5
La danza de las lunas y una incógnita	13
ATERRIZANDO IDEAS	
La probabilidad de que estemos solos en el universo	23
Una aplicación de MCMC a la Criptografía	32
Los límites del malabarismo	39
ACTIVA TUS NEURONAS	
Retos matematicos	45
Enigmas matemáticos	46
Killer sudoku	47
ZONA OLÍMPICA	
Lista de problemas	48
Pregunta de Erdős	48
EN EL HORIZONTE	
El Farahísmo, las matemáticas aplicadas y una forma de vivir	49



Editorial

Consejo Académico

Claudia Gómez Wulschner
César Luis García

Consejo Editorial

Director

Dan Jinich Fainsod

Tesorera

Tonantzin Real Rojas

Secretaria

Ana Patricia Vela Noyola

Edición

Diego Villegas Aguilar
José Ángel Rodríguez
Rafael Arredondo Villa
Alonso Martínez Cisneros
Emiliano Pizaña Vela
Isabel Junquera Badilla
Sergio Iván Arroyo Giles
Fernanda López Utrilla

Diseño web

Alonso Martinez

Agradecimientos

A la División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas del ITAM. En especial a Beatriz Rumbos, Claudia Gómez, César Luis García. A la Dirección Escolar del ITAM, específicamente a Magdalena Barba. Gracias a Aikaiké y AlephNull, representaciones de los alumnos de Actuaría y Matemáticas Aplicadas, respectivamente, por el apoyo brindado. Agradecemos también al Fondo de Organizaciones Estudiantiles y al Consejo Universitario de Honor y Excelencia.

$$\text{sen}(x^x) = x$$

<http://laberintos.itam.mx>
laberintos@itam.mx



Diseño de portada:

Dan Jinich Fainsod

Imagen de portada:

Jana Fainsod

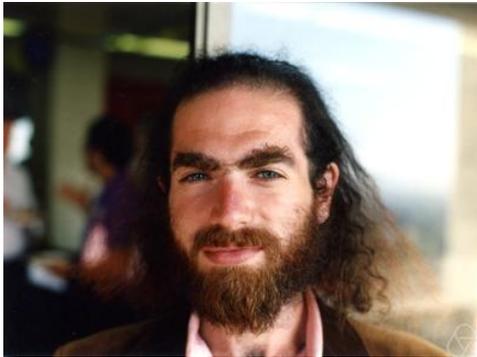
LABERINTOS INFINITOS. Año 2021. No. 53. febrero 2021. es una publicación cuatrimestral editada por el Instituto Tecnológico Autónomo de México, a través de las Direcciones de Actuaría y Matemáticas del ITAM. Calle Río Hondo No. 1. Col. Progreso Tizapán. Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01080. Tel. 56284000 ext 1732. www.itam.mx. raulranirezribea@gmail.com. Editor responsable: Dan Jinich Fainsod. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2016-112313125200-102. ISSN: en trámite, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Licitud de Título y contenido en trámite, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Permiso SEPOMEX en trámite.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Grigori Perelman

Alonso Martínez Cisneros

Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM



Muchas personas tienden a pensar en las y los matemáticos, físicos, y otros estudiosos, como el típico ermitaño retraído de la sociedad. A muchos nos ha tocado más de una vez explicar por qué no vamos a terminar viviendo en el sótano de la casa de nuestros papás, desempleados a los 40. Y si bien es cierto que somos casi todas personas tan normales como las que podríamos encontrar en cualquier otro campo de estudio, estaríamos mintiendo si dijéramos que el estereotipo no tiene mérito alguno. Grigori Perelman, uno de los matemáticos más celebrados de nuestra generación, es tan célebre por talentoso como lo es por excéntrico.

Perelman, nacido en la presente ciudad de San Petersburgo, comenzó a mostrar talento matemático desde los 10 años y comenzó a estudiar en un instituto especializado para desarrollar su talento. Destacó en casi todas sus asignaturas, salvo educación física. Su carrera como matemático experimentó un ascenso meteórico; le ofrecieron puestos de investigación en el Instituto Courant en Nueva York y posiciones de enseñanza en Princeton y Stanford, las cuales rechazó para volver a su natal Rusia.

Una vez asentado en el Instituto Steklov en San Petersburgo, Perelman comenzó a trabajar con sus antiguos asesores en dar sólida fundación a campos de las matemáticas aún muy recientes y poco estudiados, como los espacios de Alexandrov, teoría Morse, y espacios no-suaves.

Empezando el siglo XXI, Perelman enfocó sus talentos a uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas, nombrado uno de los problemas del milenio por el Instituto Clay: la conjetura de Poincaré. Por cada uno de estos problemas del milenio, el Instituto Clay ofrece un millón de dólares a quienes les den solución. Sin embargo, no era esta la razón por la cual Perelman estaba interesado en este problema. En el 2002, Perelman publicó el primer *preprint* de lo que llegaría a ser verificada como la prueba en el sitio arXiv, un sitio donde la comunidad matemática publica su investigación para hacerla accesible y someterla a verificación. Después de rigurosas revisiones y correcciones a su trabajo

original, alrededor de 2006 se determinó que Perelman había logrado resolver el problema.

A lo largo de su estelar carrera, Perelman recibió una multitud de premios y condecoraciones por sus logros. Por nombrar algunos, el premio de la EMS (Sociedad Matemática Europea, por sus siglas en inglés), la medalla Fields, y el premio del milenio. Perelman los rechazó todos, los últimos dos siendo considerados los más altos honores a los que podría aspirar un matemático. Incluso rechazó el premio del millón de dólares del Instituto Clay, se rehusó a presentarse para recibir el premio y criticó fuertemente al proceso de premiación y al instituto.

Después de un corto periodo en el que dio lecciones a expertos de todo el mundo sobre su demostración, Perelman se retiró de la esfera pública. Decidió abandonar su puesto en el Instituto Steklov, retirándose de las matemáticas quizás para siempre. Durante todos estos años se piensa que vivió solo con su madre en su ciudad natal, sin mucha interacción con el mundo exterior. Personas cercanas a él han comentado que continúa viviendo en casa de su madre, y no ha tenido apariciones públicas en los últimos 15 años. En el 2007 se creyó que estaba trabajando en otro problema del milenio: la existencia y unicidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero no se ha podido confirmar nada al respecto, puesto que Perelman es una persona muy privada y no ha dado entrevistas ni apariciones públicas a nadie en muchos años. Actualmente se desconoce si se retiró definitivamente del campo, o si está trabajando en secreto.

Basado en las entrevistas que dio antes de desaparecer de la vida pública, se cree que Perelman quedó sumamente desencantado con el campo de las matemáticas en general, y lo que él percibió como faltas éticas a su trabajo, mencionando que se sentía como una especie de mascota. Para ser justos, los medios a nivel mundial mostraron un interés desproporcionado por Perelman después de que se confirmara su gran logro. La historia de matemático brillante que resuelve un problema increíblemente difícil no parecía tan novedosa, pero la de matemático brillante que además rechaza un millón de dólares y sigue viviendo con su madre sí parecía de lo más interesante. Quizás a los medios, como a la mayoría de las personas, les gustan las historias que tienden a confirmar su visión acerca de un tema o de un grupo de personas, y Perelman llenó ese rol.

Quizás Perelman haya tenido dos grandes lecciones para la comunidad matemática, y la segunda no le ganaría medallas ni premios. Lejos de pensar en Perelman como el ermitaño retraído con tendencias antisociales, valdría la pena reflexionar cómo es que en conjunto la comunidad lo hizo sentir como "una mascota", en sus propias palabras.

Quizás de haber sido más considerados con Perelman, y con otras personas en situaciones similares, no nos habríamos perdido de su gran genio y sus contribuciones. Ahora bien, por el otro lado, si Perelman está feliz y satisfecho como persona, aun alejada de los círculos intelectuales y de las matemáticas, a nosotros no nos quedaría más que alegrarnos por él, agradecer sus contribuciones, y desearle una vida feliz, tal y como él la quiera vivir.

NASCAR y la geometría diferencial

Daniel Salnikov

Alumno de Matemáticas Aplicadas y Actuaría del ITAM

One should use common words to say uncommon things.

Arthur Schopenhauer

Introducción

La geometría diferencial estudia cómo utilizar técnicas de cálculo para analizar objetos geométricos. Un problema de interés es la aproximación de integrales elípticas, estas integrales están caracterizadas por no poder ser resueltas por medio de técnicas elementales de integración. La más simple de estas integrales estudia la longitud de arco de una elipse. Este problema tiene una aplicación en las carreras de NASCAR, ya que las pistas son óvalos que pueden ser aproximados por medio de elipses.



Al aproximar la longitud de una elipse con semi-eje menor b y semi-eje mayor a es posible encontrar los valores de (a, b) tales que el óvalo en consideración tenga la longitud deseada. Con base en la longitud es posible determinar el tipo de coche que se requiere para una velocidad promedio alcanzable en ese óvalo; además, el número de vueltas necesarias para cubrir la distancia deseada.

La solución propuesta en este artículo utiliza técnicas de integración elementales, series de Taylor y manipulación de los términos dentro de la integral. Parte de la solución es ilustrar una aplicación interesante que no necesita el uso de matemáticas muy avanzadas.

El Óvalo

Para $0 < b < a$ y $t \in [0, 2\pi]$ la elipse (óvalo) es la curva en el espacio:

$$\Gamma(t) := \begin{pmatrix} a \sin(t) \\ b \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El vector tangente a la curva está dado por:

$$\Gamma'(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ -b \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La velocidad $v(t)$ está definida cómo la norma del vector tangente al tiempo t . Es importante notar que al tratarse del recorrido sobre una elipse la velocidad va a tener un periodo de tamaño 2π ; además, esta es la distancia de la longitud de arco que ha recorrido un coche al tiempo $t \in [0, 2\pi]$. Es decir, que si $t = \frac{\pi}{2}$ un coche recorre un cuarto de la longitud de arco de la pista (óvalo). La velocidad, distancia recorrida sobre la elipse al tiempo $t \in [0, 2\pi]$ es:

$$v(t) = \int_0^t \|\Gamma'(\tau)\|_2 d\tau.$$

Así pues, al considerar la excentricidad de la elipse, dada por $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, es posible manipular la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \|\Gamma'(\tau)\|_2 d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2 \cos^2(\tau) + b^2 \sin^2(\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2(\cos^2(\tau) + \frac{b^2}{a^2} \sin^2(\tau))} d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2} \sqrt{\cos^2(\tau) + \frac{b^2}{a^2} \sin^2(\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t |a| \sqrt{1 - \sin^2(\tau) + \frac{b^2}{a^2} \sin^2(\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t a \sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2(\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t a \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

La longitud de arco de la elipse es la integral:

$$v(2\pi) = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt. \quad (1)$$

Una función útil

La siguiente función será de utilidad para aproximar la longitud de arco de una elipse, para $\alpha > 0$ considere:

$$f_\alpha(x) = (1 - x)^\alpha.$$

La función f_α es una función racional; por esto, la función admite expansión en serie de Taylor en la cercanía del cero. Las derivadas son:

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \alpha(1-x)^{\alpha-1}(-1)^1 \\ f^{(2)}_\alpha(x) &= \alpha(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2}(-1)^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f^{(n)}_\alpha(x) &= \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i)(1-x)^{\alpha-n}(-1)^n. \end{aligned}$$

Tomemos x cerca del cero, es decir $|x| < 1$. La serie de Taylor centrada en cero (Maclaurin) es convergente para $0 < x < 1$ porque esta serie es menor a una progresión geométrica con razón $r = x$ tal que $|x| < 1$. De forma que si $x \rightarrow 0^+$, entonces:

$$f_\alpha(0+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}_\alpha(0)x^n}{n!}.$$

Para el caso particular $\alpha = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{2}}(0+x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}_{\frac{1}{2}}(0)x^n}{n!} \\ &= 1 - \binom{1}{2}x - \binom{1}{2}\binom{1}{2}\frac{x^2}{2!} - \binom{1}{2}\binom{1}{2}\binom{3}{2}\frac{x^3}{3!} - \dots - \\ &\quad \binom{1}{2}\binom{1}{2}\binom{3}{2}\binom{5}{2} \dots \binom{2n-3}{2}\frac{x^n}{n!} - \dots \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (2j-1)}{\prod_{j=1}^n (2)} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{x^n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Con base en los pasos anteriores, la siguiente ecuación es válida para $|x| < 1$.

$$f_{\frac{1}{2}}(0+x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{x^n}{2n-1}. \quad (2)$$

Una integral útil

La siguiente integral es útil para aproximar la longitud de arco de una elipse, para $n \in \{1, 2, \dots\}$ considere:

$$\begin{aligned} \int \sin^{2n}(x) dx &= \int \sin^{2n-1}(x) \sin(x) dx \\ &= -\sin^{2n-1}(x) \cos(x) + (2n-1) \int \sin^{2n-2}(x) \cos^2(x) dx \\ &= -\sin^{2n-1}(x) \cos(x) + (2n-1) \int \sin^{2n-2}(x) (1 - \sin^2(x)) dx \\ &= -\sin^{2n-1}(x) \cos(x) + (2n-1) \int \sin^{2n-2}(x) dx - (2n-1) \int \sin^{2n}(x) dx \\ \therefore \int \sin^{2n}(x) dx &= \frac{1}{2n} \left(-\sin^{2n-1}(x) \cos(x) + (2n-1) \int \sin^{2n-2}(x) dx \right) + C. \quad (3) \end{aligned}$$

En particular si $t = \frac{\pi}{2}$, se tiene que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \left(-\sin(x) \cos(x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Este resultado junto con la ecuación (3) conduce a:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx &= \frac{\pi}{4} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) dx &= \frac{3}{2} \frac{\pi}{4} \\ &\vdots \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx &= \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aproximación de la longitud de arco de una elipse

Finalmente, la longitud de una elipse siempre es menor a la circunferencia de un círculo con radio igual al semi-eje mayor a de la elipse. Al ser un recorrido periódico, la longitud si $2\pi t$ es un múltiplo de la longitud total de la elipse para $t \in [0, 2\pi]$; por esto, lo interesante es medir un recorrido completo $t = 2\pi$ y recorridos parciales para $t \in [0, 2\pi]$:

$$v(t) = \int_0^t \|\Gamma'(\tau)\|_2 d\tau \leq \int_0^{2\pi} a d\tau = 2a\pi < +\infty. \quad (4)$$

También, como $0 < e^2 < 1$ y $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$; además, es cierto que $\sin^2(t) < 1$ si $t \neq k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{1, 2, \dots\}$. Si $|\sin(t)| = 1$, es posible dividir la integral en secciones con razones convergentes, $t \neq k\frac{\pi}{2}$, para que la serie sea convergente, es decir siempre es posible encontrar $t \neq k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{1, 2, \dots\}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Así pues:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m(t) = f_{\frac{1}{2}}(t) = 1 - \sum_{n=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{(e^2 \sin^2(t))^n}{2n-1} < +\infty. \quad (5)$$

Con base en (4) y (5) es posible concluir que tanto la serie como la integral son finitas; por esto, la integral con respecto a la serie está acotada por una integral finita. Entonces al considerar la integral con respecto a $S_m(t) \rightarrow f_{\frac{1}{2}}(t)$, y al considerar que $|S_m(t)| \leq g(t) = 1 + (1 - e^2 \sin^2(t))^{-1}$; por el teorema de la convergencia dominada, es posible intercambiar la suma con la integral. De acuerdo a las ecuaciones (2) a la (5), se tiene la siguiente manipulación en (1):

$$\begin{aligned} \int_0^t a \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt &= \int_0^t a f_{\frac{1}{2}}(1 - e^2 \sin^2(t)) dt \\ &= a \int_0^t 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{(e^2 \sin^2(t))^n}{2n-1} dt \\ &= a \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{e^{2n}}{2n-1} \int_0^t \sin^{2n}(t) dt \right). \end{aligned}$$

En particular, si se considera $t = \frac{\pi}{2}$, se puede reemplazar el término integral de la serie por lo obtenido en (3); de esta manera, se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt = a \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{e^{2n}}{2n-1} \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{2j} \frac{\pi}{2} \right).$$

Para aproximar la integral se fija una N tal que $N < +\infty$, luego se calcula la suma parcial y se substituye el valor de la suma parcial por el valor de la serie.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt = \frac{\pi}{2} a \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \left(\frac{(2j-1)}{2j} \right)^2 \frac{e^{2n}}{2n-1} \right)$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \prod_{j=1}^n \left(\frac{(2j-1)}{2j} \right)^2 \frac{e^{2n}}{2n-1}.$$

La metodología propuesta resulta en la aproximación de la longitud de arco de la elipse dada por:

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt \approx 4 \frac{\pi}{2} a(1 - S_N). \quad (6)$$

Si es posible, es buena práctica acompañar una aproximación con una cota para el error de la aproximación. En este caso el error, denotado por ϵ , es:

$$\epsilon = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \left(\frac{(2j-1)}{2j} \right)^2 \frac{e^{2n}}{2n-1}.$$

Esta versión de un límite conocido y muy especial es útil para acotar el error:

$$\left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n \uparrow \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}}; \quad n \rightarrow +\infty.$$

Entonces el error se puede acotar como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \left(\frac{(2j-1)}{2j} \right)^2 \frac{e^{2n}}{2n-1} &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \left(\frac{(2j-1)}{2j} \right) \frac{e^{2n}}{2N+1} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \prod_{j=1}^n \left(\frac{(2n-1)}{2n} \right) \frac{e^{2n}}{2N+1} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n \frac{e^{2n}}{2N+1} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{2n} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}(2N+1)} \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Se obtiene la cota para el error ϵ :

$$\epsilon = S - S_N \leq \frac{a^2}{\sqrt{\exp(1)(2N + 1)b^2}}. \quad (7)$$

El error aproximado para la longitud completa es:

$$\hat{\epsilon} = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{\exp(1)(2N + 1)b^2}}.$$

Conclusiones

La aproximación construida en las secciones anteriores es comparada para distintas elipses inscritas dentro de una círculo con radio de longitud 5. Las siguientes tablas comparan la longitud de arco aproximada y el error aproximado con respecto a la longitud total de la elipse.

(a,b)	$N = 3$	$N = 7$	$N = 15$
(5,5)	31.41593	31.41593	31.41593
(5,4)	30.37198	30.37188	30.37188
(5,3)	27.90971	27.89693	27.89684
(5, $\sqrt{5}$)	25.62534	25.53170	25.52704
(5, $\sqrt{3}$)	24.16572	23.93711	23.90983

Cuadro 1: Aproximación longitud de arco para distintas combinaciones de ejes.

También es posible estimar el error de la suma parcial y el error en la medición de la longitud completa. La ecuación (7) relaciona estas cantidades, en este trabajo está expuesto el error estimado en la medición de la longitud de arco completa.

(a,b)	$N = 3$	$N = 7$	$N = 15$
(5,4)	1.190920	0.4580462	0.2053311
(5,3)	2.117191	0.8143044	0.3650330
(5, $\sqrt{5}$)	3.810945	1.4657479	0.6570594
(5, $\sqrt{3}$)	6.351574	2.4429132	1.0950990

Cuadro 2: Error $\hat{\epsilon}$ estimado de las aproximaciones del cuadro anterior.

Los cuadros muestran que la excentricidad influye en la calidad de la aproximación porque si e es cercana a uno la aproximación es menos precisa, ya que la elipse es una circunferencia más degenerada que una con semi-ejes cuyas longitudes son más cercanas, i.e., $\frac{b}{a} \rightarrow 1$ mejora la calidad de la aproximación, de la misma forma esta elipse es más similar a un círculo.

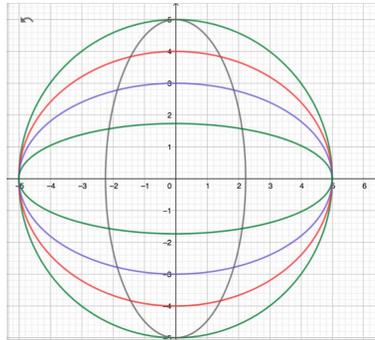


Figura 1: Elipses cuya longitud de arco fue aproximada.

Otra conclusión importante de este ejercicio es la forma en la que técnicas elementales de cálculo diferencial e integral son utilizadas para construir las ecuaciones (2) y (3); además, es posible utilizar integración elemental para establecer las ecuaciones (4) y (5) que sustentan la aproximación propuesta en la ecuación (6). Así pues, la aproximación de la longitud de arco de una elipse es un problema matemático complejo que es posible resolver por medio de técnicas aprendidas en los primeros cursos de Cálculo con un poco de ayuda de Teoría de la Medida para sustentar la aproximación en (6).

Como propone la frase de Schopenhauer al inicio de este artículo: Es posible construir soluciones complejas con base en pasos más sencillos que permiten aproximar objetos más complejos y extender el dominio de una solución. Por ejemplo, en este artículo, técnicas elementales de integración y diferenciación son adaptadas para aproximar la longitud de arco de una elipse con sucesiones y funciones más simples capaces de estimar la solución de (1). Con estas técnicas es posible calcular la cantidad necesaria de asfalto para construir un nuevo óvalo de NASCAR.

Referencias

- [1] Anderson, D., Vamanamurthy, K. and Vuorinen, M., "Functional Inequalities for Complete Elliptic Integrals," SIAM J. Math. Anal., 21, 1990, pp. 536-549
- [2] Arfken, G., Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed., Section 5.8, "Elliptic Integrals," Orlando, FL, Academic Press, pp.321-327, 1985.
- [3] Colley, Susan Jane, et al. Cálculo Vectorial. Pearson Education Asia Limited, 2015.
- [4] Grabinsky, Guillermo. Teoría de la Medida. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, Ciudad de México 2016.
- [5] Pistas Históricas NASCAR. <https://frcs.pro/nascar/tracks/historical/>

La danza de las lunas y una incógnita

Constanza Ybarra Trapote
Estudiante Lic. Matemáticas Aplicadas, ITAM
Abimael Bengochea
Profesor Depto. Matemáticas, ITAM

“En el majestuoso conjunto de la creación, nada hay que me conmueva tan hondamente, que acaricie mi espíritu y dé vuelo a mi fantasía como la luz apacible y desmayada de la luna.” -Gustavo Adolfo Bécquer

Los sucesos inusuales alrededor de Saturno

Los planetas con una gran masa permiten la existencia de fenómenos celestes extraordinarios. Por ejemplo, Júpiter atrae cuerpos celestes que se aproximan a la tierra, por lo que se le conoce como guardián de ella. Después de Júpiter, Saturno es el planeta con más masa del Sistema Solar. Dos de las características más conocidas de Saturno son sus anillos y sus satélites naturales. Existen otros fenómenos interesantes, poco conocidos, relacionados con este planeta. En este artículo abordaremos dos de ellos: la dinámica de los satélites **coorbitales**¹ Janus y Epimetheus, y de las lunas pastoras, Prometheus y Pandora, del anillo F [1, 7]. El esquema de las órbitas de estos satélites se muestra en la Figura 1.

Mitología oculta

ORIGEN DE LAS PALABRAS Y NOMBRES, HISTORIA

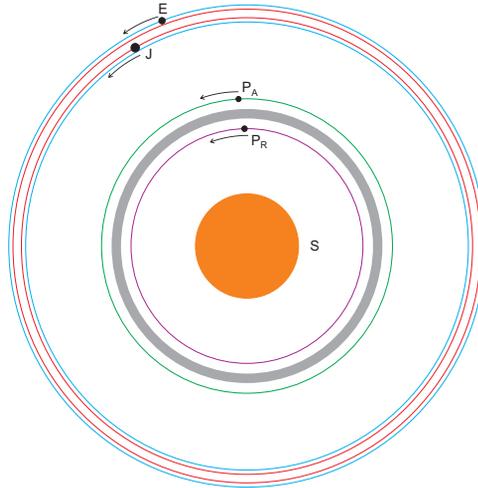
Epimetheus fue uno de los titanes, hijo de Japeto y Clímene, hermano de Prometheus, Atlas y Menoetius. Su nombre se deriva de la palabra griega *Επιμηθευς* (Epimetheus) que significa “pensamiento tardío”, antónimo del nombre de su hermano, Prometheus (*Προμηθευς*), cuyo significado es “pensamiento previo”. En este contexto, Epimetheus apareció como un personaje tonto, mientras que Prometheus fue un ser inteligente.

A Prometheus y Epimetheus se les encomendó la tarea de dar características a los animales creados por los dioses. Epimetheus dio un rasgo positivo a cada animal, sin previsión, dejándolo sin opciones para el hombre. Prometheus le dio a la humanidad las artes civilizadoras y el fuego.

Epimetheus recibió a Pandora como un regalo creado por los dioses; un humano para castigar a los humanos. De la unión de Epimetheus y Pandora nació Pyrrha. Pandora recibió un frasco que contenía todos los males de la humanidad; curiosa por ver qué había dentro, la abrió y todos los males fueron liberados en el mundo. Conmocionada, la cerró tan pronto como pudo, pero solo la esperanza permaneció atrapada dentro.

¹Satélites de un mismo planeta que orbitan a una distancia similar.

Figura 1: Esquema del anillo F y las órbitas de Janus, Epimetheus, Prometheus y Pandora. De menor a mayor radio, las circunferencias corresponden a las órbitas de Prometeo, Pandora, anillo F, órbita interior de Epimetheus, órbita interior de Janus, órbita exterior de Janus y órbita exterior de Epimetheus. En la gráfica se utiliza la primera(s) letra(s) del nombre del cuerpo celeste para identificarlo.



Ecuaciones de movimiento

Con el objetivo de describir la dinámica de los satélites de Saturno, a continuación introducimos algunos conceptos de cinemática, dinámica, y las ecuaciones de movimiento. Posteriormente describimos la tercera ley de Kepler.

Definición 1. Considere una partícula con vector de posición $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, donde $n \in \{1, 2, 3\}$. Definimos los vectores velocidad y aceleración como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

respectivamente.

Definición 2. Consideremos una partícula puntual de masa m , con aceleración \mathbf{a} , en la que actúa la fuerza \mathbf{F} . La segunda ley de Newton establece que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Definición 3. Considere dos partículas puntuales de masas m_1 y m_2 , en un sistema inercial² con vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Se define la fuerza gravitacional de Newton, que ejerce el

²Sistema donde un cuerpo en ausencia de fuerzas está en reposo o tiene un movimiento rectilíneo uniforme

cuerpo 2 sobre el cuerpo 1, como

$$\mathbf{F}_{1,2} = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}.$$

donde G es la constante de gravitacional universal y $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana.

Note que la fuerza gravitacional que ejerce el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2 difiere solamente en el signo con respecto a la fuerza mostrada anteriormente; es decir, $\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$.

Combinando la segunda ley de Newton con la fuerza gravitacional se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que describe la evolución temporal de los vectores de posición, esto es

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}.$$

Esto da lugar al concepto de **ecuaciones de movimiento**, lo cual establecemos a continuación como una definición para el caso de N cuerpos.

Definición 4. Considere N partículas puntuales con masas y vectores de posición m_i , \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$ respectivamente. Se definen las ecuaciones de movimiento del problema de N cuerpos como

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i}^N Gm_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Note que si dos o más partículas están en la misma posición; entonces, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no están bien definidas.

Tercera ley de Kepler

En un sistema de dos cuerpos los planetas pueden tener órbitas cónicas, es decir, circulares, elípticas, parábolas, hipérbolas y, el caso degenerado, líneas rectas.

La tercera ley de Kepler se hizo con base en observaciones de las órbitas de los planetas de nuestro sistema solar obtenidas por Tycho Brahe [5]. Esta establece una relación entre el periodo orbital y el semieje mayor en órbita elíptica.

Definición 5. El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al semieje mayor de la órbita del planeta.

Esta relación también puede ser deducida de las ecuaciones de movimiento. Considere un sistema de dos cuerpos, con masas m_1 , m_2 , donde el cuerpo 2 orbita alrededor del cuerpo

1, en una órbita elíptica con semieje mayor a y periodo orbital T , entonces se satisface la relación

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

Si $m_1 \gg m_2$, como sucede en el caso de los satélites de Saturno, tenemos

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_1}}.$$

De la relación anterior se deduce que si varios satélites orbitan alrededor de un planeta entonces es más rápido el satélite cuya órbita tiene un menor valor en el semieje mayor.

Dinámica Janus y Epimetheus

Las órbitas tipo herradura fueron descritas por primera vez en 1911 [2], en el problema restringido circular de tres cuerpos [6]. En este modelo simplificado, el cual es sumamente complejo, se considera la dinámica de una partícula de masa despreciable bajo el campo definido por dos cuerpos que siguen órbitas circulares prescritas. Los primeros cuerpos celestes donde se observó este tipo de movimiento coorbital fueron Janus y Epimetheus, satélites de Saturno.

Considerado un problema de tres cuerpos, la órbita del sistema Saturno, Janus y Epimetheus se da prácticamente en un plano fijo. Las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de los satélites son

$$\frac{d\mathbf{r}_J^2}{dt^2} = Gm_S \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_J}{\|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_J\|^3} + Gm_J \frac{\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_J}{\|\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_J\|^3},$$

$$\frac{d\mathbf{r}_E^2}{dt^2} = Gm_S \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_E}{\|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_E\|^3} + Gm_J \frac{\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_E}{\|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_E\|^3}.$$

En las ecuaciones anteriores se utilizan los subíndices S , J y E para referirnos a las masas y vectores de posición de Saturno, Janus y Epimetheus, respectivamente.

El movimiento de Janus y Epimetheus es posible en gran medida gracias al valor de sus masas y de la masa de Saturno. Las masas de Janus y Epimetheus son $m_J = 1.8975 \times 10^{18}$ kg y $m_E = 5.266 \times 10^{17}$ kg, de tal forma que resultan comparables de 4 a 1; sin embargo, son despreciables en comparación a la masa de Saturno, que tiene un valor de $m_S = 5.6834 \times 10^{26}$ kg. En la órbita de los tres cuerpos aparecen dos regiones características, las cuales describimos a continuación.

1. En una región, la separación entre los satélites es significativamente grande, de tal forma que la interacción entre los satélites es pequeña. En esta parte el sistema de tres cuerpos se aproxima por dos sistemas de dos cuerpos independientes: Saturno-Janus y Saturno-Epimetheus. Esto implica que los satélites orbitan alrededor de Saturno en la mayor parte de su órbita siguiendo órbitas elípticas.

2. La otra región se caracteriza por una separación mínima entre los satélites. A causa de esto, la contribución entre los satélites a la aceleración de cada uno resulta significativa.

Cada satélite tiene asociada una órbita interior y una exterior (de acuerdo a la tercera ley de Kepler, asociamos semiejes mayores y periodos o de forma equivalente frecuencias angulares, a cada órbita - los valores correspondientes a las órbitas de Janus y Epimetheus se muestran en el Cuadro 1).

Cuadro 1: Semieje mayor a y frecuencia angular ω asociados a las órbitas de Janus y Epimetheus. Se utiliza el subíndice *int* para interior y *ext* para exterior, y unidades km y rad/h para distancia y velocidad angular, respectivamente.

	a_{int}	a_{ext}	ω_{int}	ω_{ext}
Janus	151450	151472	0.376222	0.376140
Epimetheus	151422	151500	0.376326	0.376036

Para la descripción de la órbita de los tres cuerpos iniciamos con la parte donde Janus lleva una órbita interior y Epimetheus una órbita exterior. Desde el punto en el que están más alejados los satélites, hasta el punto donde están más próximos, los satélites dan cerca de 1000 vueltas alrededor de Saturno. Cuando Janus está próximo a alcanzar a Epimetheus, región a la que se le denomina **encuentro**, sucede que la interacción entre los satélites hace que Janus pase de su órbita interior a exterior y Epimetheus de su órbita exterior a interior evitando que el primer satélite alcance al segundo³. En una aproximación esférica, los radios asociados a Janus y Epimetheus son de 89.5km y 58km, respectivamente; lo que implica que, en caso de que no se contara con este cambio de órbitas se tendría una colisión física entre los satélites, ya que la separación entre los semiejes mayores de sus órbitas⁴ es solamente de 50km. Después del encuentro, Epimetheus se aleja lentamente de Janus (relativamente - la diferencia entre las frecuencias angulares interior de Epimetheus y exterior de Janus, es muy pequeña). Posteriormente, se requieren alrededor de 1000 vueltas por parte de los satélites para que estos lleguen nuevamente a una distancia máxima, la cual se alcanza cuando están opuestos a Saturno. A partir de aquí, la descripción anterior se repite, intercambiando a Janus y Epimetheus en la descripción. De esta forma, ambos satélites orbitan alrededor de Saturno, sin que ocurra un alcance o rebase entre ellos. El esquema del encuentro se muestra en las Figuras 2 y 3.

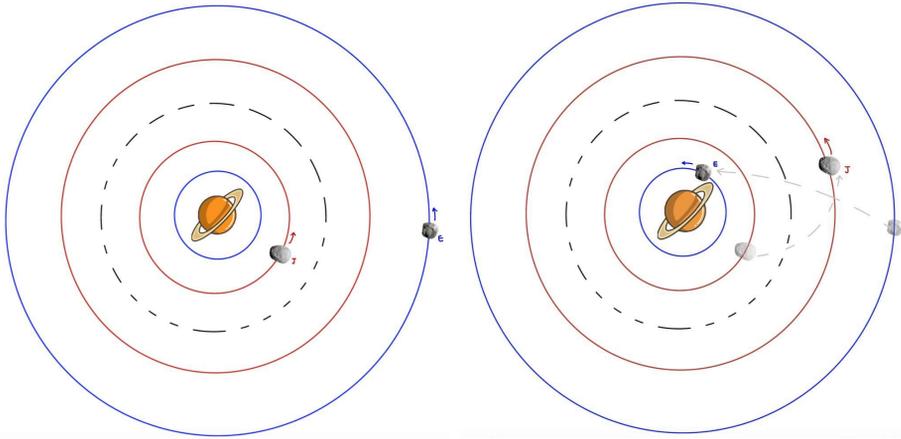
En las órbitas de Janus y Epimetheus se tienen las siguientes características:

- Janus y Epimetheus tienen la misma órbita promedio (ver curva punteada en Figuras 2 y 3).

³En esta región existe una fuerza significativa por parte de los satélites, lo que podría producir una aceleración muy grande entre ellos, dando lugar a órbitas no acotadas. Sin embargo, la gran masa de Saturno evita que esto suceda.

⁴Las excentricidades de las órbitas de los satélites son pequeñas - para la descripción que realizamos podemos asumir que las órbitas de los satélites son circulares de radio igual al semieje mayor correspondiente.

Figura 2: Esquema de las órbitas de Janus y Epimetheus cerca del encuentro, en el plano del sistema Saturno, Janus y Epimetheus. A la izquierda antes del encuentro, a la derecha después del encuentro.



- Con respecto a la órbita promedio, las órbitas interiores y exteriores de los satélites se separan en términos de un desplazamiento y una fracción de masas. La separación con respecto al promedio para la órbita de Janus es $\Delta_J = \pm \Delta \frac{m_E}{m_J + m_E} \approx \pm \frac{1}{5} \Delta$, mientras que para Epimetheus $\Delta_E = \pm \Delta \frac{m_J}{m_J + m_E} \approx \frac{4}{5} \Delta$, donde $\Delta = 50\text{km}$.
- Existen dos tiempos característicos en la órbita de los tres cuerpos. Uno de ellos es el periodo orbital de los satélites, que es cercano de 17 horas. El otro es el periodo de la órbita de los tres cuerpos, que es cercano a 8 años.

Sistema rotatorio y la órbita de herradura

Toda la órbita de los tres cuerpos se puede apreciar en un sistema en rotación con velocidad angular constante ω_0 . Si ω_E y ω_J son las frecuencias angulares asociadas a los semiejes mayores, ya sea en la combinación ω_{Eext} y ω_{Jint} , o ω_{Eint} y ω_{Jext} ; entonces, el valor adecuado para ω_0 es un promedio de las frecuencias con los mismos coeficientes que aparecen en los vectores de centro de masa [6]. Es decir,

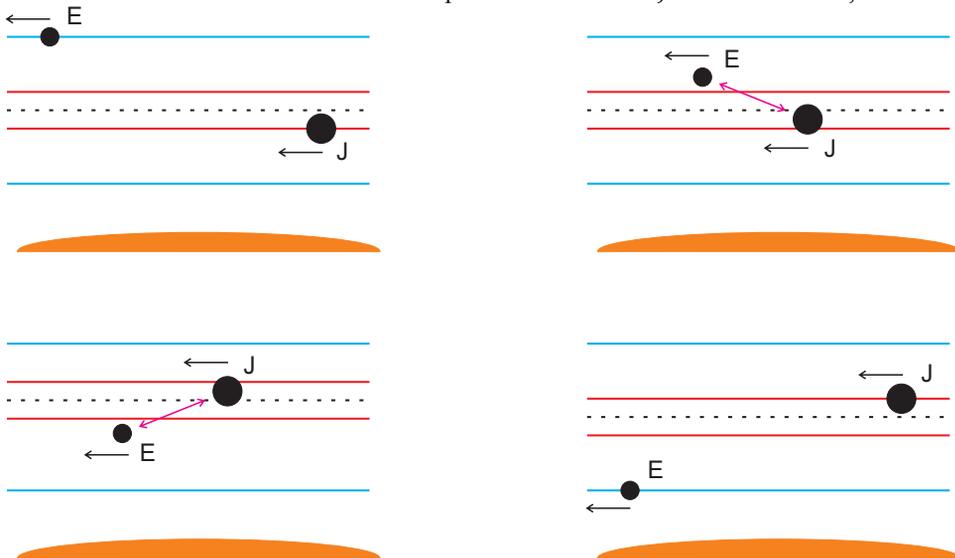
$$\omega_0 = \frac{m_E}{m_E + m_J} \omega_E + \frac{m_J}{m_E + m_J} \omega_J.$$

En estos casos se satisface

$$\begin{aligned} \omega_{Eext} < \omega_0 < \omega_{Jint}, \\ \omega_{Jext} < \omega_0 < \omega_{Eint}. \end{aligned}$$

Los vectores en el sistema en rotación con frecuencia angular constante ω_0 , denotados con

Figura 3: Esquema de las órbitas de Janus y Epimetheus cerca del encuentro, visto en perspectiva. La evolución de la órbita es de izquierda a derecha y de arriba a abajo



s se relacionan con los vectores del sistema inercial \mathbf{r} mediante la expresión

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \mathbf{r}(t).$$

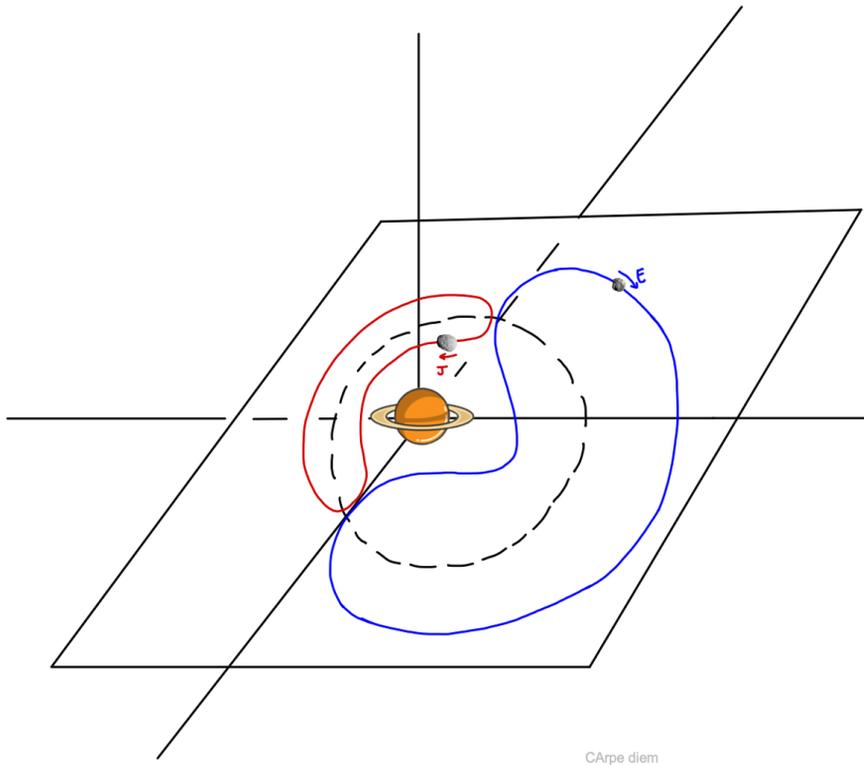
Si en el sistema inercial un cuerpo se mueve en órbita circular con frecuencia ω , entonces en el sistema rotatorio el cuerpo se moverá en órbita circular con frecuencia $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$. Sobre este sistema de referencia realizamos algunas observaciones:

- Si tuvieramos un satélite cuya frecuencia en el sistema inercial fuera $\omega = \omega_0$, entonces en el nuevo sistema de referencia el satélite estaría estático ya que $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0 = 0$.
- Para Janus y Epimetheus tenemos $\tilde{\omega}_{E_{ext}} < 0$, $\tilde{\omega}_{J_{ext}} < 0$, $\tilde{\omega}_{E_{int}} > 0$, $\tilde{\omega}_{J_{int}} < 0$. Si la frecuencia angular es positiva, por ejemplo $\omega_{E_{int}} > 0$, entonces en el sistema rotatorio veremos al satélite correspondiente, en este caso Janus, moverse en el sentido original; pero, si la frecuencia angular es negativa entonces veremos al cuerpo moverse en sentido contrario al original.
- Las frecuencias angulares de Jano y Epimetheus en el nuevo sistema rotatorio son muy pequeñas ya que $\omega_0 = 0.37618\text{km/h}$ (ver Cuadro 1).

En la Figura 4 se muestra la órbita de herradura en el periodo completo. En la herradura aparecen alrededor de 4000 risos, cada uno correspondiente a una vuelta por parte del satélite en cuestión alrededor de Saturno. Los risos se esperan ya que las órbitas de Janus y

Epimetheus son la mayor parte del tiempo elípticas. Los retornos en cada herradura corresponden a cambios de órbita interior-exterior, o exterior-interior, por parte de los satélites.

Figura 4: Esquema de la órbita de herradura en el sistema en rotación con frecuencia angular constante ω_0 . El movimiento de los tres cuerpos se da en un plano fijo.



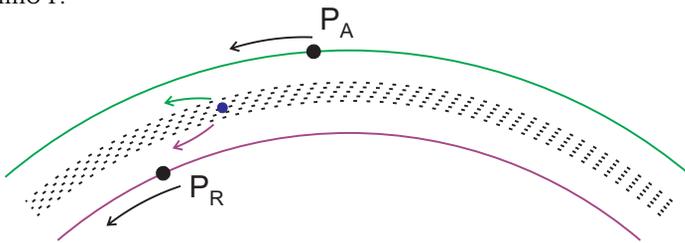
Prometheus, Pandora y el anillo F

Históricamente los anillos de Saturno han sido nombrados en orden alfabético de acuerdo a su descubrimiento. Uno de los más interesantes es el anillo F debido a su compleja estructura.

El mecanismo que explica algunas propiedades del anillo F es el de lunas pastoras [4]. Las lunas pastoras de dicho anillo son Prometheus y Pandora, satélites de Saturno. Dichos cuerpos celestes delimitan al anillo, confinándolo, lo que hace que sea de menor tamaño en comparación de otros anillos (por ejemplo, el anillo C tiene una medida radial cercana 17500km, mientras que el anillo F mide radialmente alrededor de 100km). Prometheus sigue una órbita interior, con un semieje mayor $a_{P_R} = 139380\text{km}$ y Pandora una órbita exterior,

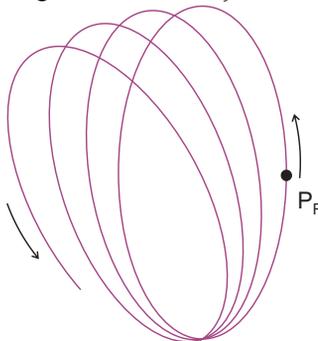
con semieje mayor $a_{P_A} = 14172\text{km}$. Las masas entre los satélites son $m_{P_R} = 1.595 \times 10^{17}$, $m_{P_A} = 1.371 \times 10^{17}$ difieren muy poco entre ellas. Prometheus, al ser el satélite interior, se mueve más rápido que las partículas del anillo F, de tal forma que las acelera, provocando que algunas de ellas salgan del anillo con una componente radial hacia Saturno. Este satélite, debido a su menor distancia al núcleo del anillo F es quien más afecta en la forma. Por otro lado, Pandora se mueve más lento que las partículas del anillo, de tal forma que las desacelera, dirigiéndolas hacia afuera del anillo con una componente radial en la dirección que sale de Saturno. La descripción de este mecanismo se muestra en la Figura 5. Existen diversas estructuras complejas en este anillo que han sido estudiadas [8].

Figura 5: Esquema del mecanismo de las lunas pastoras Prometheus y Pandora en la delimitación del anillo F.



Estudios recientes [3] sugieren que hay otros mecanismos que explican de forma más adecuada la forma del anillo F. Por ejemplo, la estructura se explica considerando solamente a Prometheus como luna pastora. En este caso, el movimiento elíptico⁵ de Prometheus, en precesión es fundamental para la explicación de la estructura del anillo (ver Figura 6).

Figura 6: Prometheus siguiendo una trayectoria elíptica en precesión.



⁵Aunque la excentricidad de la órbita de Prometheus es solamente 0.0022 es relevante en la dinámica del sistema.

Referencias

- [1] Aksnes, K. *The Tiny Satellites of Jupiter and Saturn and their Interactions with the Rings, en Stability of the Solar System and Its Minor Natural and Artificial Bodies*. Kluwer, 1985.
- [2] Brown, E. W. "Orbits, Periodic. On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 71 (1911): 438-454.
- [3] Cuzzia, J. N., Whizin, A. D., Hogan, R. C., Dobrovolskis, A. R., Done, L., Colwell, J. E., Scargle, J. D. "Saturn's F Ring core: Calm in the midst of chaos", *Icarus* 232 (2014): 157-175.
- [4] Goldreich, P., Tremaine, S. "Towards a theory for the uranian rings", *Nature* 277 (1979): 97-99.
- [5] Hellman, c. D. "Kepler and Tycho Brahe", *Vistas in Astronomy* 18 (1975): 223-230.
- [6] Meyer, K. R., Offin, C. D. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer, 2018.
- [7] Poulet, F., Sicardy, B. "Dynamical evolution of the Prometheus-Pandora system", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 322 (2001): 343-355.
- [8] Tiscareno, M. S., Murray, C. D. *Planetary Ring Systems. Properties, Structure, and Evolution*. Cambridge, 2018.

La probabilidad de que estemos solos en el universo

Dan Jinich Fainsod

Estudiante de matemáticas aplicadas e ingeniería en computación

“Perhaps when we look up the sky at night, near one of those faint pinpoints of light is a world on which someone quite different from us is then glancing idly at a star we call the Sun and entertaining, for just a moment, an outrageous speculation.”

Carl Sagan

Un poco de historia

La idea de que existe vida inteligente fuera de nuestro planeta es anterior a la historia. La búsqueda científica de inteligencia extraterrestre se puede considerar que empezó en 1959. En 1959, Giuseppe Cocconi y Philip Morrison publicaron en la revista *Nature* el artículo “Searching for Interstellar Communications” en el que sentaron las bases de la búsqueda de inteligencia extraterrestre (SETI por sus siglas en inglés)[1].

La investigación en SETI ha avanzado desde su creación, pero hay muchas preguntas que no se han podido responder, ni se podrán responder en un futuro cercano. La primera pregunta y la más fundamental es **¿estamos solos en el universo?** Si asumimos que no estamos solos, surgen muchas más preguntas: ¿Qué tan común es la vida inteligente? ¿Por qué no hemos podido contactar ni hemos sido contactados por vida inteligente? ¿Qué significa vida inteligente? ¿Realmente queremos contactar a extraterrestres?

¿Qué tan lejos está nuestro vecino más cercano?

La primera pregunta que vamos a tratar de contestar es, ¿cuál es la distancia mínima entre la tierra y una civilización avanzada extraterrestre?. Para aproximar este número, lo primero que hay que considerar es la forma de la galaxia. Vivimos en una galaxia espiral con un radio de 50,000 años luz (al) y un grosor de 1,600 al en la mitad del camino entre el borde y el centro. Entonces tenemos los valores:

- $R_G = 50,000al$, es el radio de la galaxia;
- $h_G = 1,600al$, es la altura de la galaxia.
- El volumen de la galaxia se puede aproximar con la fórmula de volumen de un cilindro y está dado por:

$$V_G = \pi R_G^2 h_G = 4000000000000\pi$$

$$V_G \approx 1.26 \times 10^{13} al^3$$

Ahora, consideramos la esfera S con centro en la tierra y radio igual a la distancia al extraterrestre más cercano (d_{et}) entre dos, esta esfera tendría un volumen dado por

$$V_S = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_{et}}{2}\right)^3$$

Es importante aclarar que dividimos entre dos, porque estamos asumiendo que las civilizaciones están equiespaciadas en la galaxia. Esto probablemente no es cierto, pero es el mejor aproximado que tenemos por ahora.

Denotamos por N el número de las civilizaciones que existen en la galaxia capaces de recibir y enviar señales de radio. Por ahora solo sabemos que $N \geq 1$, porque nosotros vivimos en esta galaxia. Considerando que asumimos que las civilizaciones extraterrestres se distribuyen uniformemente, tenemos la proporción:

$$\frac{V_G}{N} = \frac{V_S}{1}$$

Si sustituimos

$$\frac{\pi R_G^2 h_G}{N} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_{et}}{2}\right)^3}{1}$$

En esta expresión tenemos dos incógnitas: d_{et} y N . Pero, podemos suponer que podemos aproximar N basándonos en nuestro conocimiento de la galaxia. Entonces podemos encontrar una función que nos dé el valor esperado de la distancia entre civilizaciones en la galaxia:

$$d_{et}(N) = \frac{\sqrt[3]{6R_G^2 h_G}}{\sqrt[3]{N}} \approx \frac{28845}{\sqrt[3]{N}} \text{ al}$$

Como se puede ver en la figura 1, si hay 1,000,000 civilizaciones en la galaxia, la distancia esperada a la civilización más cercana sería aproximadamente 285al. Para poner este número en perspectiva: actualmente, se está construyendo el radiotelescopio mas potente de la historia, llamado *Square Kilometer Array* (SKA). Este radiotelescopio consiste de un campo de un kilómetro cuadrado que se ha llenado con antenas. El SKA va a ser utilizable en el 2027 y va a ser terminado en el 2030. Este radiotelescopio podría detectar a una civilización con tecnología similar a la tierra¹ a una distancia de 0.2kpc (kiloparsecs) o 652.313 años luz[2]. Tendríamos que tener $N \approx 90,000$ y civilizaciones en el momento correcto de su desarrollo para poder detectar a una civilización extraterrestre.

¿Cuántos vecinos tenemos?

Después del lanzamiento del satélite soviético Sputnik, la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos organizó un grupo para poner metas realistas para la Carrera Espacial.

¹Desde la Guerra Fría hasta a ahora las señales que podrían ser detectadas han disminuido considerablemente y van a seguir disminuyendo hasta que se logre crear naves espaciales que puedan hacer viajes a otras estrellas. Si se tienen naves espaciales capaces de viajar grandes distancias se cree que es necesario tener señales de radio con mayor alcance

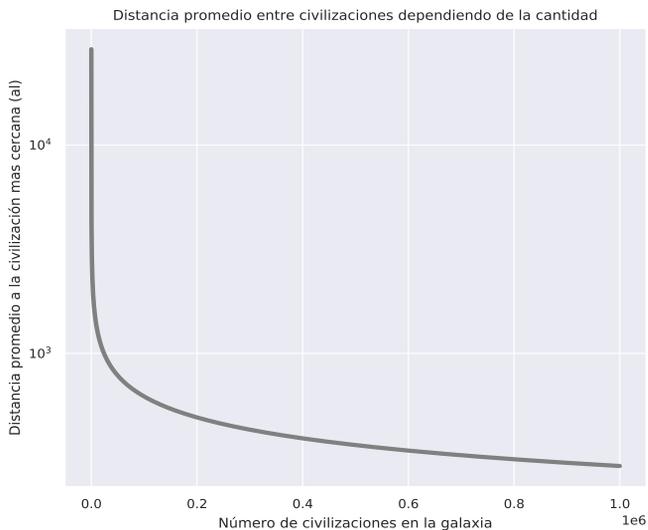


Figura 1: Comparación entre número de civilizaciones en la galaxia y distancia esperada entre civilizaciones cercanas.

Este grupo tuvo que aceptar que sabían poco sobre lo que hay en el espacio exterior. En 1961, organizaron una reunión secreta en el observatorio de **Green Bank** (Wisconsin) para discutir la posibilidad de la existencia de civilizaciones extraterrestres[6]. En la conferencia de Green Bank, Frank Drake, un matemático y astrónomo, propuso una forma de calcular el número de civilizaciones en la galaxia (N). Este método es actualmente conocido como **la Ecuación de Drake**[5].

Si tomamos las variables:

- N_s es el número de estrellas en la Vía Láctea,
- f_p es la fracción de estrellas que tienen planetas,
- n_e es el número de planetas en un sistema promedio que cumplen con las condiciones para tener vida,
- f_l es la fracción de planetas que cumplen con las condiciones para tener vida y si tienen vida,
- f_i es la fracción de planetas que tienen vida en los que evoluciona vida inteligente,
- f_c es la fracción de planetas en los que evoluciona vida inteligente que existe una civilización avanzada;

- f_L es la fracción de la vida del planeta durante la cual ha habido una civilización avanzada.

Entonces la Ecuación de Drake se puede escribir como:

$$N = N_s * f_p * n_e * f_l * f_i * f_c * f_L$$

La realidad es que para la mayoría de estas variables, no podemos hacer más que adivinar.

Ejemplo de la ecuación de Drake

De acuerdo a la NASA hay entre 1×10^{11} y 4×10^{11} estrellas en la galaxia[4], por lo que tomamos arbitrariamente $N_s = 2.5 \times 10^{11}$. De acuerdo a la NASA puede ser que la gran mayoría de las estrellas tienen planetas[3], vamos a tomar $f_p = 0.7$. No sabemos todavía cómo saber si un planeta es habitable, hay muchos factores además de la atmósfera y la temperatura que hay que considerar, pero podemos tomar $n_e = 1$. Estos valores nos llevan a que el número de planetas habitables en la galaxia es:

$$N_s * f_p * n_e = 2.5 \times 10^{11} * 0.7 * 1 = 1.75 \times 10^{11}.$$

Ahora, para las siguientes variables ya no tenemos idea y estamos completamente adivinando. No sabemos cuales son las condiciones y las posibilidades de vida, pero podemos asumir que la vida (por más sencilla que sea) es relativamente común, $f_l = 0.2$. De acuerdo a estos números, hay 3.5×10^{10} planetas en la galaxia que han tenido vida.

La vida inteligente implica un nivel de complejidad mucho mayor a la vida en general. Aun así, podemos ser relativamente optimistas porque no sabemos realmente qué significa *vida inteligente* en otro planeta, podemos creer que hay muchos caminos que nos lleven a vida inteligente, $f_i = 0.01$. Podemos adivinar que la vida inteligente tiende a una civilización avanzada a menos de que haya algún evento de extinción masivo, por lo que $f_c = 0.2$. Ahora, tenemos que hay 1.96×10^4 planetas que han tenido una civilización avanzada.

Para analizar por cuanto tiempo existe una civilización avanzada, podemos ver a nuestra propia civilización. La civilización avanzada en la tierra tiene menos de un siglo de existencia y no es exagerado pensar que es probable que nos vamos a destruir en pocos siglos, si no es que menos. Comparando esto con la edad de la tierra, podemos aproximar que 1×10^{-8} , pero vamos a ser optimistas y decir que $f_L = 1 \times 10^{-7}$. Con los números que usamos llegamos a que $N = 7$. Es importante tomar en cuenta que la variable que más afectó fue f_L y la verdad es que también hay razones para ser optimistas sobre nuestro futuro y el futuro de nuestros vecinos galácticos.

Si somos más optimistas sobre la probabilidad de que se forme vida inteligente y sobre el tiempo de vida de una civilización, podemos llegar a creer que hay miles de civilizaciones avanzadas en la galaxia. Si hay miles de civilizaciones en la galaxia, por más grande que sea nuestra galaxia, no es descarado creer que algún día las podamos contactar.

Una versión estadística de la ecuación de Drake

Es claro que el procedimiento anterior no fue correcto. Hubo que adivinar demasiado y hay que adivinar en cada paso. Los resultados que la ecuación da cambian mucho si cambian

los valores considerados. Se puede usar para argumentar que hay millones de civilizaciones avanzadas en la Vía Láctea o que el valor esperado del número de civilizaciones avanzadas es menor a uno.

En el 2012, el matemático y astrónomo italiano Claudio Maccone publicó el artículo “The statistical Drake equation” en el que propuso una versión probabilística de la ecuación de Drake. Esta versión de la ecuación de Drake soluciona varios de los problemas de la ecuación de Drake y logra presentar N como una variable aleatoria.

La primera variable que usamos en la ecuación es N_s y sabemos que hay entre 1×10^{11} y 4×10^{11} . Tomar cualquier valor de N_s no sería correcto, al fin y al cabo lo que hicimos al elegir $N_s = 2 \times 10^{11}$ fue adivinar. Tiene más sentido emplazar a N_s con una variable aleatoria, al igual que todas las otras variables.

Entonces, reemplazamos cada uno de los valores con una variable aleatoria D_j , con media μ_j y desviación estándar σ_j . Responder cuáles son los valores de cada μ_j y σ_j es una tarea para los expertos en los campos de cada una de las variables. Aun así, no conocemos ni tenemos las herramientas para conocer la distribución de probabilidad de ninguna de estas variable.

Para resolver este dilema podemos utilizar la Teoría de información de Shannon y un teorema que demostró en 1948[8]:

Teorema 1. *La distribución de probabilidad con mayor entropía (es decir incertidumbre) sobre cualquier rango finito de números reales es la distribución uniforme².*

Entonces, podemos asumir que D_j se distribuye uniforme con media μ_j y desviación estándar σ_j . Esto es equivalente a decir que

$$D_j \sim \mathcal{U}(a_j, b_j)$$

con $a_j = \mu_j - \sqrt{3}\sigma_j$ y $b_j = \mu_j + \sqrt{3}\sigma_j$. Ahora necesitamos encontrar la distribución de probabilidad de N , donde N puede ser representado por la ecuación de Drake estadística:

$$N = D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6 D_7$$

Teorema 2. *La variable aleatoria N tiene una función de densidad de probabilidad*

$$f_N(y) = \frac{1}{2\pi y} \int_{-\infty}^{\infty} y^{-it} \prod_{j=0}^7 \frac{b_j^{(it+1)} - a_j^{(it+1)}}{(b_j - a_j)(1 + it)} dt$$

Demostración. Tenemos 7 variables aleatorias D_j independientes que se distribuyen uniformemente continuas sobre distintos rangos positivos, tales que el producto de las 7 variables aleatorias es N . Tomamos el logaritmo de ambos lados de la ecuación:

$$\ln(N) = \ln \left(\prod_{j=1}^7 D_j \right) = \sum_{j=1}^7 \ln(D_j) \quad (1)$$

²La demostración de este teorema se puede encontrar en [8].

Asignamos las variables $Y = \ln(N)$ y $Y_j = \ln(D_j)$ para $j = 1, 2, 3 \dots 7$. Ahora tenemos que encontrar la distribución de cada Y_j y la distribución de Y , recordando que $N = e^Y$.

Tomamos a $g(x) = \ln(x)$ y claramente su inversa es $g^{-1}(x) = e^x$. Ya que g es estrictamente creciente sabemos que la función de probabilidad acumulada de Y_j es

$$F_{Y_j}(y) = P(Y_j \leq y) = P(g(D_j) \leq y) = P(D_j \leq g^{-1}(y)) = F_{D_j}(g^{-1}(y))$$

por lo que tenemos que

$$F_{Y_j}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \ln(a_j) \\ \frac{e^y - a_j}{b_j - a_j} & \text{si } y \in [\ln(a_j), \ln(b_j)] \\ 1 & \text{si } y > \ln(b_j) \end{cases}$$

Ahora podemos encontrar la función de densidad de probabilidad de Y_j viendo que

$$f_{Y_j}(y) = F'_{Y_j}(y) = \frac{d}{dy} F_{D_j}(g^{-1}(y)) = f_{D_j}(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \quad (2)$$

entonces podemos ver que

$$f_{Y_j}(y) = \begin{cases} \frac{e^y}{b_j - a_j} & \text{si } y \in [\ln(a_j), \ln(b_j)] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora que ya tenemos la FDP de Y_j , necesitamos encontrar su media y su desviación estándar:

$$E[Y_j] = \int_{\ln(a_j)}^{\ln(b_j)} y f_{Y_j}(y) dy = \frac{1}{b_j - a_j} \int_{\ln(a_j)}^{\ln(b_j)} y e^y dy = \frac{(\ln(b_j) - 1)b_j - (\ln(a_j) - 1)a_j}{b_j - a_j}$$

Para poder calcular la desviación estándar, necesitamos calcular la esperanza de Y_j^2 :

$$\begin{aligned} E[Y_j^2] &= \int_{\ln(a_j)}^{\ln(b_j)} y^2 f_{Y_j}(y) dy = \frac{1}{b_j - a_j} \int_{\ln(a_j)}^{\ln(b_j)} y^2 e^y dy \\ &= \frac{b_j [\ln^2(b_j) - 2 \ln(b_j) + 2] - a_j [\ln^2(a_j) - 2 \ln(a_j) + 2]}{b_j - a_j} \end{aligned}$$

De aquí podemos ver que:

$$\sigma_{Y_j}^2 = E[Y_j^2] - E^2[Y_j] = 1 - \frac{a_j b_j [\ln(b_j) - \ln(a_j)]^2}{(b_j - a_j)^2}$$

y tenemos que la desviación estándar es:

$$\sigma_{Y_j} = \sqrt{\sigma_{Y_j}^2} = \sqrt{1 - \frac{a_j b_j [\ln(b_j) - \ln(a_j)]^2}{(b_j - a_j)^2}}$$

También necesitamos la función característica de las variables aleatorias Y_j , ya que la función característica de la suma de variables aleatorias independientes es el producto de sus funciones características:

$$\phi_{Y_j}(t) = \int_{\ln(a_j)}^{\ln(b_j)} e^{ity} f_{Y_j}(y) dy = \frac{1}{b_j - a_j} \int_{\ln(a_j)}^{\ln(b_j)} e^{y(it+1)} dy = \frac{b_j^{(it+1)} - a_j^{(it+1)}}{(b_j - a_j)(1 + it)}$$

De aquí podemos ver que:

$$\phi_Y(t) = \prod_{j=0}^7 \phi_{Y_j} = \prod_{j=0}^7 \frac{b_j^{(it+1)} - a_j^{(it+1)}}{(b_j - a_j)(1 + it)}$$

Entonces podemos calcular la FDP de Y haciendo la transformada inversa de Fourier:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \phi_Y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \prod_{j=0}^7 \frac{b_j^{(it+1)} - a_j^{(it+1)}}{(b_j - a_j)(1 + it)} dt$$

Esta función no es analíticamente integrable. Combinamos este resultado con (2) y tenemos que

$$f_N(y) = \frac{1}{|y|} f_Y(\ln(Y)) = \frac{1}{2\pi y} \int_{-\infty}^{\infty} y^{-it} \prod_{j=0}^7 \frac{b_j^{(it+1)} - a_j^{(it+1)}}{(b_j - a_j)(1 + it)} dt$$

y sabemos que $N \in \left[\prod_{j=1}^7 a_j, \prod_{j=1}^7 b_j \right]$ □

Hay otra forma de conseguir una función de densidad de probabilidad que es mas fácil de utilizar. Por la ecuación (1), tenemos que $N = e^Y$ con

$$Y = \sum_{j=1}^7 Y_j, \quad \text{con} \quad \mu_{Y_j} = \frac{(\ln(b_j) - 1)b_j - (\ln(a_j) - 1)a_j}{b_j - a_j} \quad \text{y} \quad \sigma_{Y_j}^2 = 1 - \frac{a_j b_j [\ln(b_j) - \ln(a_j)]^2}{(b_j - a_j)^2}.$$

Ahora, ya que tenemos la suma de varias variables aleatorias, podemos aplicar el **Teorema Central del Limite** (TCL) con condiciones de Lindeberg. Este dice que la suma de n variables independientes no necesariamente idénticamente distribuidas tiende a una distribución normal, donde:

$$\mu_Y = \sum_{j=1}^7 \mu_{Y_j} \quad \text{y} \quad \sigma_Y^2 = \sum_{j=1}^7 \sigma_{Y_j}^2.$$

Ya que $N = e^Y$ y Y se distribuye normal, se puede ver que

$$N \sim \text{Lognormal}(\mu_Y, \sigma_Y^2).$$

Finalmente, esta distribución cumple con que mientras más variables se consideren entre las D_j , mejor se pueden elegir los parámetros que definen a la distribución de N .

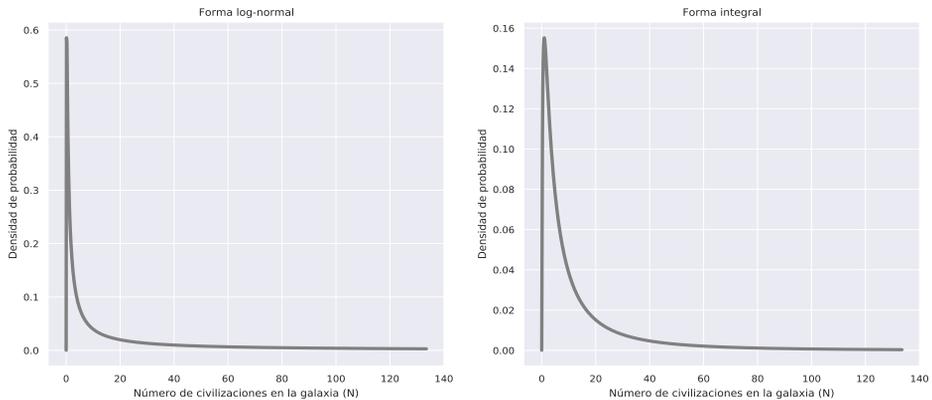


Figura 2: Ambas formas de la función de densidad de probabilidad evaluadas numéricamente.

Conclusión

Es importante recordar que el volumen de la galaxia es aproximadamente $1.26 \times 10^{13} \text{al}^3$, o $1.07 \times 10^{52} \text{km}^3$, mientras que la búsqueda de vida extraterrestre, como rama de la ciencia, es relativamente joven. SETI, aun cuando ha avanzado mucho en los más de sesenta años que lleva existiendo, le falta mucho para llegar a su objetivo. Tiene un objetivo claro, el cual suena imposible si se consideran las proporciones del universo.

Es imposible saber si tenemos algún vecino cercano, por lo menos hasta que lo encontremos. Las matemáticas aquí presentadas, requieren que se adivine demasiado y las civilizaciones extraterrestres pueden ser tan distintas que hasta el uso de la palabra *civilización* suena incorrecto. Hay muchas objeciones que se pueden tener a la forma en la que se conceptualizó y se resolvió el problema en este artículo. Aun así, las ideas aquí presentadas pueden hacer que valga la pena voltear hacia arriba de noche y preguntarse si nuestro sol es solo una estrella para alguien más.

Referencias

- [1] G. Cocconi and P. Morrison, "Searching for Interstellar Communications," *Nature*, vol. 184, no. 4690, pp. 844–846, 1959.
- [2] A. Loeb and M. Zaldarriaga, "Eavesdropping on radio broadcasts from galactic civilizations with upcoming observatories for redshifted 21 cm radiation," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2007, no. 01, pp. 020–020, 2007.

- [3] B. Dunbar, "At Least One in Six Stars Has an Earth-sized Planet," NASA, 07-Jun-2013. Disponible en: https://www.nasa.gov/mission_pages/kepler/news/17-percent-of-stars-have-earth-size-planets.html
- [4] "How Many Stars in the Milky Way?," NASA. Disponible en: <https://asd.gsfc.nasa.gov/blueshift/index.php/2015/07/22/how-many-stars-in-the-milky-way/>.
- [5] C. Sagan, *Cosmos*, Random House, New York, 1983.
- [6] H. P. Shuch, *Searching for Extraterrestrial Intelligence SETI Past, Present, and Future*. Springer Berlin, 2013.
- [7] C. Maccone, "The statistical Drake equation," *Mathematical SETI*, pp. 24–62, 2012.
- [8] C. E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communication*. University of Illinois Press, 1999.

Una aplicación de MCMC a la Criptografía

Jorge Francisco de la Vega Góngora
Profesor del Departamento de Estadística del ITAM

“Es dudoso que el género humano logre crear un enigma que el mismo ingenio humano no resuelva”
Edgar Allan Poe

Como parte del curso de simulación que se imparte en el ITAM, se estudian diferentes metodologías para generar números pseudo-aleatorios de diversas distribuciones de probabilidad. Entre los métodos que se revisan, se incluyen algunas de las versiones más elementales de la familia de métodos Monte Carlo basados en cadenas de Markov (MCMC) que son fundamentales para la estimación de integrales en el contexto Bayesiano.

Sin embargo, la amplitud de aplicaciones de los métodos MCMC puede ayudar a resolver problemas prácticos que en primera instancia no son evidentes en el estudio de estos métodos. El objetivo de esta nota es mostrar una aplicación que puede despertar mayor interés en estos métodos entre los estudiantes.

Introducción

El método de Monte Carlo basado en cadenas de Markov fue desarrollado por Nicholas Metropolis en el laboratorio de Los Álamos en 1953 como parte de la necesidad de resolver integrales multidimensionales en la simulación del comportamiento de un líquido y su fase gaseosa. Durante un largo tiempo, estos métodos fueron usados principalmente por químicos y físicos. Wilfred K. Hastings generalizó el algoritmo de Metropolis y el resultado de sus investigaciones fue publicado en su artículo de 1970 [5]. Hastings escribe: “When I learned how easy it was to generate samples from high dimensional distributions using Markov chains, I realised how important this was for Statistics, and I devoted all my time to this method and its variants which resulted in the 1970 paper”.

Un caso especial del algoritmo de Metropolis-Hastings fue introducido por los hermanos Stuart Geman y Donald Geman en 1984, y se conoce como el “Gibbs Sampler”, nombrado así en honor a Josiah Williard Gibbs, un físico americano del siglo XIX que junto con Maxwell y Boltzmann, crearon la mecánica estadística. Fue hasta principios de los años noventas que comenzó a usarse de manera sistemática en la estadística, particularmente en la estadística Bayesiana, gracias al artículo de Smith y Gelfand [4]. Un recuento muy interesante del desarrollo del pensamiento y métodos Bayesianos se puede encontrar en el libro de Sharon Bertsch [2].

La idea básica de los métodos basados en MCMC es muy simple: queremos simular observaciones X_1, X_2, \dots, X_n de una densidad de probabilidad f . Entonces se construye una cadena de Markov $\{X_i\}$, fácil de simular y cuya distribución estacionaria π corresponda a

la distribución objetivo que nos interesa, es decir $\pi = f$. El teorema ergódico es la base de la aplicación del algoritmo MCMC.

Algoritmo de Metropolis-Hastings

El algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) simula una cadena de Markov cuya distribución estacionaria es f de la siguiente manera:

- Se comienza con un valor inicial X_0 para la cadena.
- En el n -ésimo paso, dado un valor $X_n = x$ de la cadena, se simula un nuevo valor candidato Y , de una densidad propuesta $q(Y|X_n)$, es decir $Y \sim q(\cdot|X_n)$
- El valor propuesto Y se podrá considerar o no como parte de la cadena, con una probabilidad α definida por $\alpha = \min \left\{ 1, \frac{f(y)q(x|y)}{f(x)q(y|x)} \right\}$. Entonces la cadena se actualiza con $X_{n+1} = y$ con probabilidad α o se queda en el valor actual $X_{n+1} = X_n$ con probabilidad $1 - \alpha$.

La densidad propuesta $q(\cdot|x)$ es usualmente el kernel de un proceso Markoviano con el mismo espacio de estados de la cadena de Markov que se quiere generar. Usualmente esta densidad propuesta puede ser cualquiera que cumpla con las condiciones de ergodicidad, por lo que un usuario del método puede encontrar un proceso propuesto que sea eficiente en el contexto de su problema.

A continuación veremos un ejemplo de la aplicación del algoritmo de Metropolis-Hastings, en un problema de descifrar un mensaje encriptado. El siguiente ejemplo se basa en el artículo de Persi Diaconis [3] y el desarrollo que hace Robert Dobrow [1].

Definición del modelo

Sea A un conjunto que representa un alfabeto con n letras y un espacio. Por ejemplo, en el inglés se consideran $n = 26$ letras más el espacio son 27. Ahora consideremos un mensaje M_k que consta de k letras en A . En el español podrían ser 28 o 29.

Sea $\sigma : A \rightarrow A$ una permutación o función de codificación. Hay $n!$ permutaciones. Para el inglés como se definió arriba hay $27! \approx 10^{28}$ posibles funciones de codificación.

$$\sigma(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(n)}).$$

Consideremos un mensaje M_k conformado por k letras en A . El problema a resolver es el siguiente: si M_k es un mensaje cifrado, queremos encontrar la función σ^* que decodifica el mensaje para hacerlo legible.

Para descifrar el mensaje, se necesita medir de alguna manera la "distancia" entre el mensaje cifrado y el mensaje real. El mensaje real no es conocido, por lo que se requiere una medición indirecta. Esta medición puede basarse en la verosimilitud de que ciertas letras aparezcan de manera conjunta. Para estimar esta verosimilitud, se puede usar una muestra del lenguaje común, que típicamente se conoce como corpus.

Dado un corpus asociado al alfabeto A , podemos construir una función de evaluación (como una especie de 'distancia') de la siguiente manera: sea O la matriz de $(n + 1) \times (n + 1)$ que registra la frecuencia de transiciones de una letra a otra en el corpus, formando pares de letras. Por ejemplo, si el corpus es: ábracadabrá, entonces $O_{ab} = O_{br} = O_{ra} = 2$, $O_{ac} = O_{ca} = 1$, etc.

A la función σ le podemos asignar la evaluación:

$$\text{eval}(\sigma) = \prod_{i=1}^k O_{\sigma(c_i), \sigma(c_{i+1})}$$

La función de evaluación para el mensaje M_k lo definimos como el producto sobre todas las frecuencias de los pares sucesivos de letras $(\sigma(c_i), \sigma(c_{i+1}))$ en el texto descifrado con la σ particular.

Esta evaluación será mayor cuando frecuencias de pares sucesivos en el mensaje corresponden con aquellos que aparecen más frecuentemente en el texto de referencia. Entonces, codificaciones con altas evaluaciones son las candidatas para decodificar. El objetivo es encontrar la σ^* con valor de evaluación máxima.

A continuación, se considera un corpus basado en la obra completa de Jane Austen, que se encuentra disponible en el Proyecto Gutenberg y de la que se calcula la matriz de transiciones O . Dobrow y Goldfeather hicieron el cálculo de la matriz, sería ideal contar con una versión similar en español.

```
set.seed(123) #fija una semilla para reproducir el ejercicio.

# La siguiente matriz está basada en la obra de Jean Austen y cuenta las transiciones
# encontradas entre letras consecutivas (idioma inglés) Fuente: Dobrow.
archivo <- "https://raw.githubusercontent.com/jvega68/Simulacion/master/datos/AustenCount.txt"
mat <- read.table(archivo, header = F)
row.names(mat) <- colnames(mat) <- c(letters, "space")
mat[1:3,1:3] #transiciones de a->a, a->b a->c, b->a, y así sucesivamente

  a      b      c
a 117 6669 7227
b 2385  208    0
c 8527   5 1843

logmat <- log(mat + 1) #transforma a logaritmos para facilitar operaciones.
```

Podemos definir una distribución de probabilidad que sea proporcional al score sobre el

espacio de permutaciones, y el problema de Montecarlo consiste en muestrear de esta distribución:

$$\pi_{\sigma} = \frac{eval(\sigma)}{\sum_{\psi \in \mathcal{C}} eval(\psi)}$$

Es importante notar que el denominador de esta densidad no se puede calcular, pues es la suma de $n!$ componentes. Pero para aplicar el algoritmo de Metropolis-Hastings sólo basta conocer los cocientes de la forma $\pi_{\sigma}/\pi_{\psi} = eval(\sigma)/eval(\psi)$, lo cual simplificará mucho el procedimiento.

```
evaluacion <- function(permutacion){  
  # calcula score del mensaje codificado con permutacion dada.  
  p <- 0  
  # Para cada par de letras en el mensaje decodificado  
  # busca la matriz de transición para la probabilidad de ese par  
  for (i in 1:(nchar(mensaje)-1)){  
    p <- p + logmat[charIndex(substr(permutacion, i, i)),  
                    charIndex(substr(permutacion, i+1, i+1))]  
  }  
  # regresa la suma de estas probabilidades  
  return(p)  
}
```

Elección del kernel de transición

Podemos ejecutar una caminata aleatoria en el conjunto de permutaciones de la siguiente manera: dada una permutación σ , la transición a una permutación propuesta σ^* se da tomando dos letras al azar y cambiando los valores que σ asigna a esas letras. Con este método de transposiciones aleatorias se contruye un kernel de transición simétrico, obteniendo como cociente de Hastings la siguiente expresión:

$$\alpha(\sigma, \sigma^*) = \frac{\pi_{\sigma^*} q(\sigma^*|\sigma)}{\pi_{\sigma} q(\sigma|\sigma^*)} = \frac{eval(\sigma^*)}{eval(\sigma)}$$

Algoritmo

Para hacer las búsquedas de los pares en la matriz O se indexan a través de sus códigos ASCII, para lo que se usan dos funciones: `ascii` y `charIndex`.

```
ascii <- function(char){  
  # ascii(char) devuelve el numeral ascii de un caracter  
  strtoi(charToRaw(char), 16L) #obtiene valor ascii crudo  
}
```

```

charIndex <- function(char){
  # esta función toma un caracter y regresa su 'char value'
  # definido como a=1, b=2, ..., z=26, space=27 en la matriz
  # esto es para que corresponda a la posición en la matriz diccionario
  aValue <- ascii(char)
  if (aValue == 32) {
    27 #regresa 27 si es un espacio
  } else {
    aValue - 96 #ascii define "a" como 97, así que reescalamos restando 96
  }
}

```

Las evaluaciones ya hechas se van guardando en una lista de 'environments' para no tener que recalcularlas cada vez.

Ejemplo

Consideremos el siguiente mensaje. Para simplificar, se han eliminado los signos de puntuación y la diferencia entre minúsculas y mayúsculas:

coincidences in general are great stumbling blocks in the way of that class of thinkers who have been educated to know nothing of the theory of probabilities that theory to which the most glorious objects of human research are indebted for the most glorious of illustrations edgar allen poe the murders in the rue morgue morpheus

#Este es el mensaje codificado. Hay que descodificarlo

```

mensaje <- "coincidences in general are great stumbling blocks in the way of that
class of thinkers who have been educated to know nothing of the theory of probabilities
that theory to which the most glorious objects of human research are indebted for the
most glorious of illustrations edgar allen poe the murders in the rue morgue morpheus"

decrypt <- function(perm,fa){
  # Descripta código de acuerdo al score actual fa
  out <- perm
  # para cada caracter en el mensaje, decodifica de acuerdo al score actual fa
  for (i in 1:nchar(mensaje)) {
    charInd <- charIndex(substr(perm,i,i))
    if (charInd < 27) {
      # cambia el i-ésimo caracter al determinado por fa
      substr(out,i,i) <- rawToChar(as.raw(fa[charInd] + 96))
    }
  }
  return(out)
}

```

```
codemess <- decrypt(mensaje,sample(1:26)) # codemess tiene el mensaje encriptado, con alguna p  
codemess
```

```
[1] "nuxlnxcjlnjb xl kjljhot ohj khjog bgzistxlk stunwb xl gej fod ur geog ontobb ur gexljwhb f
```

Entonces la simulación queda del siguiente modo:

La salida final nos da iteraciones similares a las siguientes, que aquí se reducen por cuestiones de espacio:

```
[1] "300"
```

```
[2] "wsouwodeuwea ou geuenir ine gneit atlycroug crswfa ou the miv sp thit wriaa  
sp thoufena mhs hibe ceu edlwited ts fusm uthoug sp the thesnv sp jnscicorotoea  
thit thesnv ts mhowh the ysat grsnosla sckewta sp hlyiu neaeinwh ine oudedted psn  
the ysat grsnosla sp orrlatnitosua"
```

```
[1] "600"
```

```
[2] "cioucofeuces ou geuenal ane gneat strbploug plicms ou the way id that class  
id thoumens whi have peeu efrcatef ti muiw uthoug id the theiny id jnipapolotoes  
that theiny ti whoch the bist glinoirs ipkects id hrbau neseanch ane oufeptef din  
the bist glinoirs id ollrstnatoius"
```

```
[1] "900"
```

```
[2] "cioucofeuces ou geuenal ane gneat strmploug plicbs ou the way id that class  
id thoubens whi have peeu efrcatef ti buiw uthoug id the theiny id qnipapolotoes  
that theiny ti whoch the mist glinoirs ipkects id hrmau neseanch ane oufeptef din  
the mist glinoirs id ollrstnatoius"
```

```
[1] "1200"
```

```
[2] "coincifences in general are great stumpling plocbs in the way od that class  
od thinbers who have peen efucatef to bnw nothing od the theory od qropapilities  
that theory to which the most glorious opkects od human research are infepfef dor  
the most glorious od illustrations"
```

```
[1] "1500"
```

```
[2] "coincidences in general are great stumpling plocbs in the way of that class  
of thinbers who have peen educated to bnw nothing of the theory of jropapilities  
that theory to which the most glorious opkects of human research are indepted for  
the most glorious of illustrations"
```

Podemos ver que después de un número de simulaciones el mensaje comienza a ser legible. Sin embargo, el número de iteraciones necesarias puede ser muy variable. Otro tema que requiere más estudio es entender el proceso de convergencia de las cadenas de Markov generadas y que puede ser motivo de otro artículo.

Conclusiones

En este artículo, se hizo una introducción muy general sobre los métodos MCMC, y se revisó un ejemplo de aplicación muy concreta en el ámbito de los modelos en criptografía.

Referencias

- [1] Dobrow, Robert P. *Introduction to Stochastic Processes with R*. Wiley, 2016.
- [2] Bertsch McGrayne, Sharon *The Theory That Would Not Die: How Bayes'Rule Cracked the Enigma Code, Hunted Down Russian Submarines, and Emerged Triumphant from Two Centuries of Controversy*. Yale University Press, 2016.
- [3] Diaconis, Persi. "The Markov chain Monte Carlo revolution", *Bulletin of the American Mathematical Society* 46(2):179-205, 2009.
- [4] Gelfand, Alan E. y Smith, Adrian F. M. "Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities", *Journal of the American Statistical Association* 85 (1990):398-409.
- [5] Hastings, W. K. "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications", *Biometrika* 57-1 (1970):97-109.

Los límites del malabarismo

Carlos Bosch Giral
Profesor Depto. Matemáticas, ITAM

Introducción

Para llevar tres sandías que pesan 2 kilogramos cada una de un lugar a otro, un hombre que pesa 71 kilogramos debe atravesar un puente que solamente aguanta 75 kilogramos. Tiene prisa y no quiere hacer dos viajes. ¿Qué es lo que tiene que hacer para cruzar el puente con sus sandías sin que este se caiga? La solución de este viejo problema es sencilla si le indicamos al hombre que debe malabarear las sandías de manera que una sandía siempre esté en el aire. Sin embargo esta solución teórica no se puede aplicar en la vida real ya que al lanzar al aire alguna de las sandias el hombre debe ejercer una fuerza en la sandía que lanza que se suma a su peso y que hará que el puente no aguante y él se caiga.

A pesar de que no hemos podido resolver en la práctica el problema, el malabarismo presenta muchos otros retos de los que hablaremos aquí; unos matemáticos, otros físicos y otros concernientes a la habilidad del malabarista.

La definición y un poco de historia

Debemos dar una definición de lo que es el malabarismo para poderlo estudiar y encontrar sus raíces en la historia de la humanidad.

El malabarismo es la acción de lanzar y cazar, de manera continua y sobre un mismo trayecto o un trayecto semejante, objetos más numerosos que los instrumentos que los lanzan y cazan.

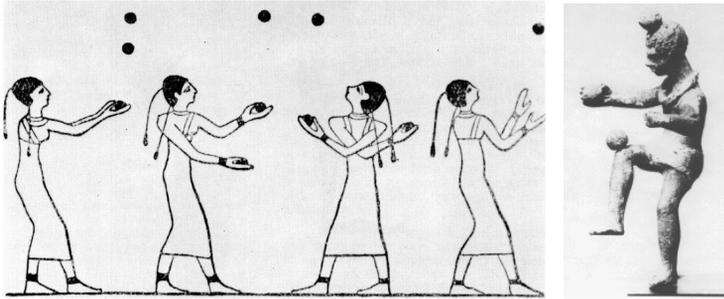
De manera genérica llamaremos mano al instrumento que lanza y pelota al objeto lanzado. Entonces el número de manos debe ser menor que el número de pelotas. Por ejemplo, se puede malabarear dos pelotas con una mano o tres con dos manos pero no consideraremos malabarismo el usar dos pelotas y dos manos.

Para poder estudiar matemáticamente este arte supondremos que algunas propiedades se cumplen:

- Todas las pelotas siguen el mismo trayecto.
- Todas las pelotas se quedan en la mano el mismo tiempo.
- Todas las pelotas se quedan en el aire el mismo tiempo.
- Nunca hay dos pelotas en la misma mano.

Una vez que hemos definido el malabarismo veamos cuándo y cómo apareció. La imagen más antigua que se tiene del malabarismo apareció en Egipto y está fechada

entre 1794 y 1781 antes de nuestra era. La otra es una estatuilla de barro del año 200 antes de nuestra era, encontrada en Roma y que actualmente está en el museo de Berlín.



En las distintas civilizaciones, a menudo el malabarismo fue utilizado por chamanes, adivinos o brujos como algo que no estaba cercano a los mortales. Posteriormente, en la época gloriosa del circo y de los grandes espectáculos uno de los actos más importantes fue el malabarismo; que se hacía con distintos objetos, haciéndolo cada vez más vistoso al usar antorchas, cuchillos, bolas de boliche.

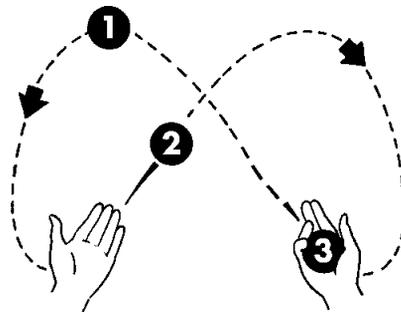
El primer estudio científico sobre el malabarismo apareció en 1903, cuando Edgar Swift publicó en el *American Journal of Psychology* un artículo donde describía la rapidez con la que ciertos jóvenes aprendían a malabarear dos pelotas con una sola mano. Posteriormente, en 1947 se creó la Asociación Internacional de Malabaristas que anualmente organiza el día mundial del malabarismo. El próximo año será el 19 de junio de 2021. A continuación, el cartel correspondiente al día internacional del año 2020. En su convención anual, esta asociación llama a los malabaristas de todo el mundo para romper los *records* existentes.



En 1970 Claude Shannon creó sus máquinas para malabarear en MIT y estableció una relación entre la posición de las pelotas y la acción de las manos. Finalmente, fue en 1981 que apareció la matematización del malabarismo, de lo cual hablaremos en la siguiente sección.

Las cuentas

El movimiento más usual en el malabarismo es el ocho, y es este movimiento el que estudiaremos con más detalle, aunque hay otros movimientos que también son usuales. Con las suposiciones hechas es fácil darse cuenta que el movimiento en ocho es simétrico, periódico y uniforme, donde uniforme quiere decir que las pelotas describen curvas lisas y suaves en el sentido matemático. Aquí el ocho con tres pelotas y dos manos.



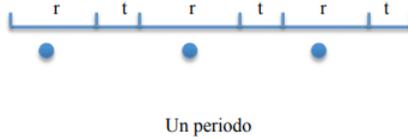
Analicemos las variables que necesitamos. Obviamente el número de pelotas, que denotaremos por p y el número de manos, que denotaremos por m . Observemos que para que tengamos una situación de malabarismo, p debe ser mayor que m . Ahora observemos que una pelota está cierto tiempo en la mano, y ese tiempo es el mismo para cada pelota; a ese tiempo lo denotaremos por r . También será importante el tiempo que una pelota está en el aire cuando va de una mano a la siguiente; a ese tiempo lo denotaremos por v . Finalmente, consideraremos el tiempo en que la mano no tiene pelota y lo denotaremos por t . En resumen,

- p : número de pelotas.
- m : número de manos.
- v : tiempo de vuelo de una pelota entre manos.
- r : Tiempo que una pelota está en una mano.
- t : tiempo en que la mano está vacía.

Si nos fijamos en una pelota específica tenemos que, o está en una mano un tiempo r , o bien está en el aire un tiempo v , y así continúa alternando. Aquí una situación con dos manos.



Si nos fijamos en una mano, esta tendrá una pelota un tiempo r o bien estará vacía un tiempo t , y así continúa alternando. Aquí una situación con tres pelotas.



Hagamos un cálculo rápido para ver cuánto tarda una pelota de salir de una mano y regresar a esa misma, es decir, cuánto tarda en completar un periodo. Para calcular el periodo, la pelota tiene que ir de mano en mano, donde se tarda $r + v$, y luego pasar por todas las manos.

Fijándonos en una pelota, un periodo se puede calcular como:

$$m(r + v).$$

Ahora concentrémonos en la mano. Para calcular un periodo debemos fijarnos que una pelota cae en la mano cada $r + t$, y para completar el periodo todas las pelotas deben pasar por esa mano.

Fijándonos en una mano, un periodo se puede calcular como:

$$p(r + t)$$

Hemos calculado el periodo de dos maneras diferentes, por lo tanto

$$m(r + v) = p(r + t),$$

de donde se obtiene la fórmula conocida como Razón de Permanencia y que fue descubierta por Claude Shannon en 1981:

$$\frac{p}{m} = \frac{(r + v)}{(r + t)}.$$

Observemos que como p , el número de pelotas, es mayor a m , el número de manos, la razón $\frac{p}{m}$ es mayor que 1, por lo que $\frac{(r + v)}{(r + t)}$ es mayor que 1, de modo que el tiempo de vuelo v debe ser mayor que el tiempo t en que la pelota está en la mano.

Entonces, si un humano malabarea siempre tendremos que el número de manos es 2, y para poder malabarear cada vez con más pelotas se debe de incrementar el tiempo de vuelo y disminuir el tiempo en que la pelota está en la mano, ya que el cociente $\frac{(r + v)}{(r + t)}$ debe ser lo mayor posible.

Se pueden analizar los dos casos en los que, ya sea r o t , sean cero. Son casos que no son realistas, pero que inmediatamente arrojan que, para que $\frac{(r + v)}{(r + t)}$ sea lo mayor posible, el

tiempo de vuelo debe ser lo mayor posible, y obviamente para aumentar v hay que aumentar la altura que alcanzará la pelota.

Para tener un modelo más apegado a la realidad debe entrar en juego la fuerza de la gravedad, que es lo que hace que la pelota no pueda ir demasiado alto. Como la pelota sigue una trayectoria parabólica en el movimiento de ocho, sabemos que su movimiento está regido por $h = \frac{1}{2}gx^2$, donde h es la altura que alcanza la pelota, g es la constante de aceleración y

x es el tiempo. De donde $x^2 = \frac{2h}{g}$. Ahora, en el modelo anterior el tiempo de vuelo de la pelota es $v = 2x$ de manera que $v^2 = \frac{8h}{g}$, lo cual. Debido a que g es aproximadamente 10,

nos da que $v^2 = \frac{8h}{10} = \frac{4h}{5}$. Así v varía aproximadamente como 0.9 multiplicado por la raíz cuadrada de h ! Por ejemplo, si un malabarista hace su ejercicio en ocho con tres pelotas y lanza cada una a 40cm, si quiere aumentar a 5 pelotas, las deberá lanzar a unos 2 metros, aproximadamente. Si lo quiere hacer con 7 pelotas, cada una la deberá de lanzar a una altura de más de 6 metros. Esto nos da idea de cómo aumenta la dificultad al aumentar el número de pelotas.

Únicamente hemos hablado del movimiento en forma de ocho, en el cual por asuntos de simetría se usa siempre un número impar de pelotas. Casi cualquier persona con una semana de entrenamiento será capaz de malabarear tres pelotas en forma de ocho. Dicen los expertos que para hacerlo con cinco pelotas se requieren unos seis meses de entrenamiento. Con esto nos damos cuenta de la complicación que es aumentar el número de pelotas.

Los records

Muchos de los *records* que existen en el malabarismo son utilizando objetos diferentes a pelotas, como ya lo hemos indicado. Otros, en el tiempo máximo de mantener cierto número de pelotas, en general 3 o 5, en forma de 8 sin que se caigan. En la red se pueden consultar varios de estos *records*.

Sin embargo, lo más llamativo es saber cuál es el *record* del número de pelotas que se mantiene en el aire dando al menos una vuelta, es decir, que al menos cada pelota pase por una mano una vez.

El *record* es de Alex Baron, que en 2017 lanzó al aire 11 pelotas e hizo 33 atrapadas, es decir que cada pelota la cachó tres veces. Posteriormente lanzó 13 bolas al aire, cachó cada una al menos una vez, cachó las pelotas 15 veces. Después de eso se planteó lanzar 14 bolas al aire, que sería el mayor número de objetos en el aire, pues Alex Baron lo logró cachando exactamente una vez cada una de las pelotas, es decir que hizo 14 cachadas.

En la siguiente página se pueden ver todos los *records* que hay al respecto.

https://juggle.fandom.com/wiki/World_records.

Terminaremos hablando brevemente de uno de los más famosos malabaristas que han existido, Enrico Rastelli (1896 - 1931). En su época, él era una verdadera celebridad del espectáculo de variedades cuando éste era la principal forma de entretenimiento. Su carrera

consistió en tres períodos distintos.

1. El primer periodo fue la manipulación de las bolas.
2. Durante el segundo periodo, en un traje de seda, trabajó con bolas de goma, haciendo malabarismo al parecer de rebote.
3. Finalmente, con el auge que empezó a tomar el fútbol, cambió su acto y comenzó a hacer malabarismo con balones de fútbol.



Activa tus neuronas

Retos matemáticos

1. Demuestra que

$$\frac{x^n y^m}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

si $n + m > 2, n, m \in \mathbb{N}$

2. Encuentre todos los enteros positivos (a, b, c) para los que se cumple

$$a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$$

3. Te regalan un set de n bloques, cada uno pesa al menos 1; el peso total de todo el set es de $2n$. Demuestra que para cada número real r con $0 \leq r \leq 2n - 2$ se puede escoger un subconjunto de bloques que tenga un peso de mínimo r y máximo $r + 2$.
4. Sea $u_1, u_2, \dots, u_{2019}$ números reales que satisfacen lo siguiente:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2019} = 0$$

y

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2019}^2 = 1$$

Sea $a = \min(u_1 + u_2 + \dots + u_{2019})$ y $b = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_{2019})$. Prueba que

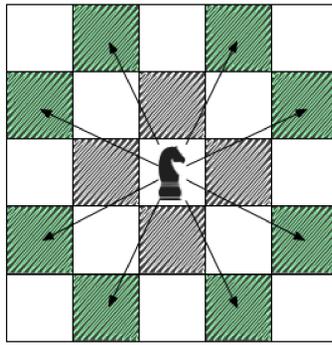
$$ab \leq -\frac{1}{2019}$$

5. Encuentra todos los pares (m, n) de enteros positivos que satisfacen la ecuación

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{(n-1)}) = m!$$

Enigmas matemáticos

1. Se entrega una baraja de $n > 1$ cartas. Se escribe un número entero positivo en cada tarjeta. La baraja posee la propiedad de media aritmética en cada par de cartas y la media geométrica en algunas colecciones de una o más cartas ¿Para qué n los números de las tarjetas son todos iguales?
2. En el juego de ajedrez, existen fichas que tienen la posibilidad de pasar por todas las casillas del tablero, como el rey y la reina, y fichas que no tienen esa posibilidad, como el alfil. ¿Pero qué ocurre con el caballo? ¿Puede el caballo moverse por el tablero de tal forma que pase por todas y cada una de las casillas del tablero?



3. En esta ocasión nos encontramos con una serie de igualdades, de las cuales debes resolver la última. Si $8806 = 6$, $7111 = 0$, $2172 = 0$, $6666 = 4$, $1111 = 0$, $7662 = 2$, $9312 = 1$, $0000 = 4$, $2222 = 0$, $3333 = 0$, $5555 = 0$, $8193 = 3$, $8096 = 5$, $7777 = 0$, $9999 = 4$, $7756 = 1$, $6855 = 3$, $9881 = 5$, $5531 = 0$, $2581 = ?$

Killer sudoku

Reglas:

- Complete la cuadrícula de modo que cada fila, columna y bloque de 3×3 contenga los dígitos del 1 al 9.
- Cada sección punteada posee una pista en la esquina, y la suma números de cada sección debe coincidir con la pista.
- No puede haber números repetidos en las secciones.

21			3		32		21	
	14							
13		16		28				32
	18			20				
9								8
21		14		19	14			
							9	25
24		19		8		17		

Zona Olímpica

1. La función piso $f(x) = \lfloor x \rfloor$ regresa el máximo entero menor o igual a x . Encuentre x tal que:

$$x \lfloor x \rfloor = 2020.$$

2. Encuentre una función tal que:

$$f'(x) = f^{-1}(x).$$

3. Pruebe que para cualquier número natural n el número:

$$n^3 + 11n$$

es divisible entre 6.

4. Sean a, b dos enteros tales que $\frac{a}{b} < 1$. Encuentre dos enteros c, d tales que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{ac}{bd} = 1.$$

5. Sean a, b y c tres números positivos que satisfacen el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pruebe que:

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

6. Pruebe que ningún entero cuyos dígitos sumen 15 puede ser un cuadrado perfecto.¹

Pregunta de Erdős

Encuentre un cuadrado perfecto de 8 dígitos tal que los primeros cuatro dígitos son los últimos cuatro dígitos más uno. Es decir:

$$\begin{aligned} x &= x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 \\ x_1x_2x_3x_4 &= x_5x_6x_7x_8 + 1 \\ x &= n^2 \end{aligned}$$

para algún número natural n .

¹Un cuadrado perfecto es un número cuyas raíces cuadradas son exactas, es decir, estas se encuentran en los naturales.

El Farahísmo, las matemáticas aplicadas y una forma de vivir

Joaquín Sánchez

Ex-alumno de Matemáticas Aplicadas, ITAM

Durante la cuarentena 2020

Lamentablemente, en este artículo no voy a hablar sobre faraones. Así que si eso esperabas leer, puedes detenerte ahora. Este artículo habla sobre una manera de entender las matemáticas que cambió y modeló mi manera de ser y de pensar, habla de lo que yo entendí sobre las matemáticas a través de las muchísimas y pacientes reuniones que tuve con el Dr. José Luis Farah Ibáñez. Voy a intentar, al nivel de mi limitada capacidad de entendimiento, explicar lo que este gran profesor y mejor persona, me enseñó durante mis estudios en el ITAM. Con el paso del tiempo, de los títulos, experiencias y cambios, su forma de pensar hace más sentido. Es a esta manera de entender las matemáticas y el mundo, lo que hoy salvajemente me atrevo a llamar *Farahísmo*.

Las matemáticas puras y las aplicadas

¿Existe una verdadera división entre matemáticas puras y aplicadas? Para poder aplicar las matemáticas, realmente hay que entender lo que está pasando. Hay que ir a los detalles, saber por qué pasan las cosas. No es lo mismo usar un modelo matemático que entenderlo. Y si para entenderlo hay que estudiar la teoría más 'pura', pues hay que hacerlo. Es lo que toca. Sin miedo. Esto no significa que necesitas conocer 30 ejemplos de conjuntos no medibles para hacer una regresión lineal. Significa que si el entender lo que está pasando involucra matemáticas de alto nivel, debes hacer un esfuerzo para comprender las ideas que llevaron al desarrollo de esa teoría.

Por otro lado, las teorías más avanzadas y nuevas en matemáticas llevan ciertas ideas detrás y aunque no puedas usar directamente todo, seguro que las ideas te ayudarán a pensar problemas de la vida real. Esta aparente división de las matemáticas es una manera de justificar hacer desastres. Las matemáticas son la manera de pensar y desarrollar ideas, un buen matemático aplicado es un buen matemático y punto. Polémica opinión sin duda, pero como alguien que ha estado en 'ambos' tipos de programas (puros y aplicados) concuerdo totalmente.

La importancia de la idea y el engaño de los símbolos

Que no te apantallen los símbolos matemáticos que alguien usa para expresar una idea. Lo único importante es la idea. Durante el curso de Cálculo 4, el profesor Farah nos dejó la tarea de demostrar un teorema, creo que era Heine-Borel, sin usar símbolos matemáticos. Pensé que nada más lo hacía por molestar, hasta que le dediqué tiempo. Los símbolos son la manera más eficiente de expresar las ideas que tenemos, pero detrás siempre están las ideas. No me refiero a escribir todo como un párrafo horrible donde sustituyes \exists por 'existe', sino que la prueba, puede expresar todo su contenido lógico sin objeción como

una plática. El lector interesado debe tomar cualquier teorema de su preferencia e intentar probarlo sin usar símbolos. A ver qué sale.

Entender a los grandes

Muchas veces perdemos foco de las ideas detrás de ciertos conceptos ya que han pasado por un proceso de asimilación y refinación de años de matemáticos importantes. A veces las pruebas son tan elegantes que parece magia. Leer a la persona que demostró el teorema, a Riesz, a Hausdorff, a Kantorovich, a Kolmogorov, etc., a veces parece que usan un lenguaje diferente, pero siempre explican las ideas con claridad. Con la capacidad tecnológica de hoy en día, todas las publicaciones de los grandes matemáticos están a una búsqueda de distancia. Otra vez, sin miedo.

No es que no tenga matemáticas, es que no se las pones

En repetidas ocasiones, el profesor Farah me contó la misma historia. Era obvia la importancia de la moraleja de esta historia para él, así que, sin haberla presenciado, me voy a dar el lujo de contarla en tercera persona.

Una vez estaba el profesor Farah en su cubículo del ITAM, imagino que leyendo la prueba original de un teorema en alemán o una locura por el estilo. A su cubículo llegó un ex-alumno de la carrera de matemáticas aplicadas con el cual tuvo una buena relación. Después de un cariñoso abrazo, el ex-alumno procedió a descargar sus frustraciones sobre su ex-profesor, ahora amigo. 'José Luis, tengo un gran trabajo en una compañía importante en la que gano mucho dinero, pero me molesta que mi trabajo no tiene nada de matemáticas. Siento que hasta cierto grado estudiar matemáticas fue un desperdicio. Me piden cosas sencillas que resuelvo con cosas demasiado básicas y sin mucho esfuerzo. Mi trabajo no tiene matemáticas'. En este momento, me imagino, el profesor Farah se ofendió, pero amablemente le dijo: 'Por más sencillas que sean las cosas que te piden, siempre puedes mejorar tus resultados, tus conclusiones y tu entendimiento con matemáticas. Si dedicas el suficiente tiempo a razonar lo que está pasando en tu trabajo, encontrarás maneras de mejorarlo gracias a lo que has aprendido a través de las matemáticas'.

No hay nada más cierto que las palabras, seguramente mal parafrasadas por mí, del profesor Farah en esta historia. El matemático tiene herramientas a su disposición, que no están al alcance de todos, pero está en él usarlas y sacar ventaja de ellas.

Conclusión

El 'Farahismo' es una forma de entender las matemáticas como lo que son: la mejor herramienta para desarrollar nuestras ideas. Para ser un matemático no hacen falta títulos sino una estructura lógica para resolver problemas y muchas ganas de pensar. Las matemáticas son difíciles pero también nos dan alcance a ideas increíbles. No importa si un día se te olvida cómo probar ese teorema complicadísimo, siempre que tengas las ideas correctas,

será cuestión de tiempo deducirlas.

Espero que este pequeño homenaje al profesor José Luis Farah no haya estado completamente alejado de lo que con mucha paciencia intentó explicarme durante los años de mis estudios. Yo sigo la filosofía Farahísta en mi día a día, qué suerte tuvimos los que pudimos confundirnos con él aquellos días que los cálculos no salían por un error de signo. Necios con que si la idea está bien, no tiene porque no salir. Cada vez que el profesor se dijo a sí mismo: 'Ay, Farah, aquí está el signo mal', aprendí más, que las veces que la demostración salió a la primera.