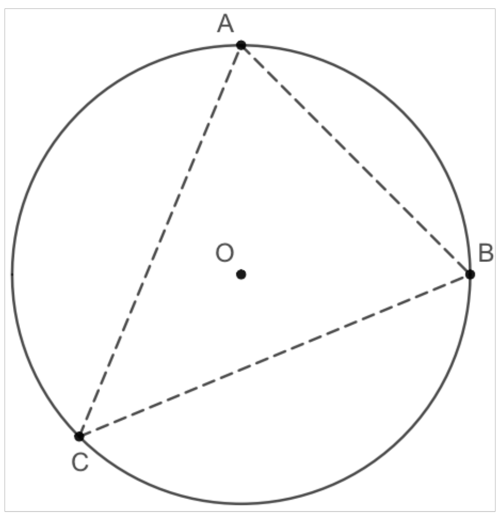
Soluciones Zona Olímpica #47

Problema 1

Enunciado

Se colocan de forma aleatoria tres puntos A, B, C en un círculo con centro O y se trazan rectas que los conecten formando un triángulo. ¿Cuál es la probabilidad de que el centro del círculo quede dentro del triángulo? Un ejemplo donde el centro del círculo sí está en el triángulo inscrito se ve de esta forma:



Solución

Supongamos sin pérdida de generalidad que primero se colocaron los puntos A y B. Se trazan diámetros a partir de estos puntos y nombramos A' y B' a los puntos del lado opuesto respectivamente. Notar que el triángulo formado por ABC solo contendrá al centro si C está entre A' y B'.

Suponiendo también sin pérdida de generalidad que el círculo tiene circunferencia (perímetro) igual a 1, entonces la longitud de arco entre A' y B' está entre 0 y 0.5. Como estos puntos se colocaron de forma aleatoria, el valor esperado de esta longitud de arco es de 0.25. Y como C también se coloca de forma aleatoria, se concluye que la probabilidad de que el triángulo ABC contenga al centro es de 0.25.

Problema 2

Enunciado

Demostrar que sen 10^o es irracional.

Solución

Necesitamos relacionar sen 10^o con algún valor exacto de la función seno que conozcamos. Usaremos la siguiente propiedad que resulta de las identidades de suma de ángulos:

$$sen(3x) = 3sen(x) - 4sen^3(x).$$

De esta forma, podemos expresar $sen(30^o)$ como $3sin(10^o) - 4sin^3(10^o)$ y obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2} = 3sin(10^o) - 4sin^3(10^o)$$

Haciendo la sustitución $x = sin(10^o)$, resulta la ecuación cúbica

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Como todas las raíces racionales deberían ser enteros y dividir el término constante y además ± 1 no son raíces del polinomio, concluimos que todas las raíces son irracionales y por lo tanto sin 10^o es no es racional.

Problema 3

Enunciado

En la Copa del Mundo del verano pasado, había 32 equipos divididos en 8 grupos de 4 equipos cada uno. Los primeros 2 lugares de cada grupo avanzaban a una etapa de eliminación directa, cada uno de un cuadrante opuesto.
Asumiendo que todos los equipos tienen la misma probabilidad de avanzar en cada fase, ¿cuál es la probabilidad de que dos equipos se enfrenten entre ellos dos veces?
¿Cómo se podría generalizar el problema si fueran 2^n equipos?

Solución

Si todos los equipos tienen la misma probabilidad de avanzar, la fase de grupos no es relevante para el problema. Dos equipos saldrán de cada grupo habiéndose enfrentado una vez. Como ambos equipos que avanzan se van a lados opuestos de la llave, podemos usar la simetría y solo fijarnos de un lado. Asumimos sin pérdida de generalidad que el equipo del grupo A avanza a la final, ganándole al equipo del grupo E en semifinales, por lo que este jugará el partido por el tercer lugar.
La probabilidad de que el otro equipo del grupo A llegue a la final es de $\frac{1}{8}$, bajo el supuesto de

que todos los equipos son igual de fuertes. De manera similar, la probabilidad de que el otro equipo del grupo E llegue al tercer lugar es de $\frac{1}{8}$. Por otro lado, la probabilidad de que ambos eventos ocurran es de $(\frac{1}{4})(\frac{1}{4})(\frac{1}{2})$. Esto es que ambos equipos lleguen de manera independiente a la semifinal y que además el equipo del grupo A gane la semifinal.
Por el principio de inclusión-exclusión, concluimos que la probabilidad de que dos equipos se enfrenten dos veces está dada por

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{7}{32}.$$

Para el problema en general con 2^n equipos, hacemos un razonamiento similar. La probabilidad que un equipo en particular llegue a la final dado que pasó fase de grupos es $\dfrac{1}{\left(\dfrac{2^n}{4}\right)}$, la que un equipo en específico llegue al tercer lugar es la misma y la de que ambos lo hagan, está dada por $\left(\dfrac{1}{\left(\frac{2^n}{8}\right)}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Calculando la probabilidad de la unión de eventos y simplificando, obtenemos que la probabilidad en general está dada por

$$\frac{2^{n-2}-1}{2^{2n-5}}.$$

Problema 4

Enunciado

Resolver la siguiente ecuación para $y \in \mathbb{R}$.

$$2\sqrt[3]{2y-1} = y^3 + 1.$$

Solución

Primero, hacemos la sustitución

$$x = \frac{y^3+1}{2}.$$

De ahí la ecuación original pasa a ser

$$y = \frac{x^3+1}{2}.$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos

$$x - y = \frac{y^3+1}{2} - \frac{x^3+1}{2}.$$

Factorizando y pasando todo de un lado, obtenemos finalmente que

$$(x-y)(x^2+y^2+3) = 0,$$

de donde concluimos que $x = y$, de donde se sigue que la ecuación original se puede expresar como

$$y^3 - 2y + 1 = 0,$$

la cual tiene como raíces $y = 1$, $y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Problema 5

Enunciado

Sea A una matriz de dimensiones nxn tal que existe un entero positivo k que cumple que

$$kA^{k+1} = (k+1)A^k$$

Pruebe que la matriz $A - I_n$ es invertible y encuentre su inversa (I_n representa la matriz identidad de dimensiones nxn).

Solución

A partir de la igualdad, sabemos que

$$I_n = kA^{k+1} - (k+1)A^k + I_n.$$

Luego, factorizamos la segunda expresión como

$$kA^{k+1} - (k+1)A^k + I_n = (A - I_n)(kA^k - A^{k-1} - \dots A - I_n).$$

Y así concluimos que $(A - I_n)$ es invertible y encontramos su respectiva inversa.

Problema 6

Enunciado

Una relación R sobre un conjunto A es llamada irreflexiva si para todo $a \in A$, se tiene que $(a, a) \notin$ R. Sea R una relación no vacía sobre un conjunto A. Pruebe que si R satisface cualesquiera dos de las siguientes propiedades: irreflexiva, simétrica y transitiva, entonces no puede satisfacer la tercera.

Solución

Sean $a, b \in A$. Haremos la demostración en tres partes.

1. Si R es transitiva y simétrica, entonces no es irreflexiva.
   Sea $(a, b) \in$ R, por simetría, se tiene que $(b, a) \in$ R y por transitividad, $(a, a) \in$ R. Por lo tanto, la relación no es irreflexiva.

2. Si R es irreflexiva y simétrica, entonces no es transitiva.
   Sea $(a, b) \in$ R, por simetría, se tiene que $(b, a) \in$ R y por irreflexibilidad, sabemos que $(a, a) \notin$ R. Se sigue que R no es transitiva.

3. Si R es irreflexiva y transitiva, entonces no es simétrica.
   Sea $(a, b) \in$ R. Supongamos que $(b, a) \in$ R. Por transitividad, se sigue que $(a, a) \in$ R, lo cual contradice la hipótesis de de irreflexibilidad. Concluimos que $(b, a) \notin$ R y por lo tanto R no es simétrica.

Problema 7

Enunciado

En cada casilla de un tablero de dimensiones 10 x 10, se escribe un número entero del 1 al 10. Todos los números que se encuentren en casillas adyacentes o diagonalmente adyacentes, son primos relativos. Demostrar que algún número aparece al menos 17 veces.

Solución

Consideremos cualquier cuadrado de 2x2. Por ser primos relativos los cuatro números en el cuadro, solo uno de ellos es divisible entre 2 y asimismo, solo uno es divisible entre 3. Se sigue que a lo más 25 números de todo el tablero son divisibles entre 2 y a lo más 25 números son divisibles entre 3. Esto implica que existen al menos 50 números en el tablero que no son divisibles entre 2 o entre 3. Por ser primos relativos a 2 y a 3, estos 50 números solo tienen 3 posibilidades: ser 1, 5 ó 7. Concluimos por el principio del palomar que al menos uno de estos aparece 17 veces o más.

Problema 8

Enunciado

Prueba que para cualquier entero no negativo n, se tiene que el número

$$5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$

no es primo.

Solución

Haremos la sustitución $x = 5^{5^n}$. De esta forma, podemos expresar el número como el polinomio

$$x^5 + x + 1.$$

Notamos que este polinomio no es irreducible, pues se puede factorizar como

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

Después no es difícil demostrar inductivamente que ambos factores son mayores a 1 para toda $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que el número no es primo.

Problema 9

Enunciado

Sean A y B conjuntos. Encontrar todos los conjuntos X que cumplan las siguientes propiedades:

- $A \cap X = B \cap X = A \cap B$.
- $A \cup B \cup X = A \cup B$.

Solución

Usando la primera propiedad, sabemos que

$$(A \cup X) \cap (B \cup X) = A \cap B.$$

Aplicando Ley de De Morgan, se sigue que

$$(A \cup B) \cap X = A \cap B.$$

Notamos que el lado izquierdo se puede reescribir como $(A \cup B \cup X) \cap X$, por la segunda propiedad. La expresión anterior es igual a X y se concluye que $X = A \cap B$.