Zona Olímpica

1. Encontrar todas las soluciones enteras del problema:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{19}.$$

Solución: La ecuación dada implica que $xy = 19(x+y)$. Para tener soluciones enteras, por lo menos una de las dos variables debe ser divisible entre 19. Como la ecuación es simétrica, podemos asumir que $x = 19k$, donde k es un entero. Luego entonces,

$$xy = 19(x+y) \implies ky = 19k + y.$$

Por la igualdad pasada, podemos ver que $19k + y$ debe ser divisible entre k. Como 19k es claramente divisible entre k, entonces $y = km$, donde m es un entero. Por lo tanto,

$$ky = 19k + y \implies km = 19 + m \implies m(k-1) = 19.$$

Como ambos k y m son enteros, solo hay 4 combinaciones donde la ecuación anterior se cumple:

$$\begin{aligned} m = 19, k-1 = 1 &\implies x = 38, y = 38 \\ m = -19, k-1 = -1 &\implies x = 0, y = 0 \\ m = 1, k-1 = 19 &\implies x = 380, y = 20 \\ m = -1, k-1 = -19 &\implies x = -342, y = 18 \end{aligned}$$

Por simetría, entonces hay 5 poribles soluciones:
$(38, 38), (380, 20), (20, 380), (-342, 18), (18, -342)$.

2. ¿Es posible ordenar los números $1, 2, 3, \ldots, 12$ alrededor de un círculo de tal forma que el valor absoluto de cualesquiera dos números subsecuentes sea 3, 4 o 5? Demuestre su solución.

Solución: Sean $S_1 = \{1, 2, 3, 10, 11, 12\}$, y $S_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Primero, nótese que los números en S_1 no pueden estar uno junto al otro. Por lo tanto debe haber un número de S_2 entre cada numero de S_1. Pero, el número 4 solamente puede estar junto al 1, y por lo tanto es imposible construir el arreglo pedido.

3. Demuestre que no hay entero positivo de la forma 2^x tal que termine con 4 dígitos iguales.

Solución: Como cualquier entero al poder de 2 es par, el número que estamos buscando debe terminar con $2, 4, 6, 8$. Supongamos que existe un número que al poder de 2 termine con 4 dígitos iguales. Llamemos a este número $p = 2^n$. Primero, notamos que $n \geq 10$. Hay 4 distintos casos a considerar.

Caso 1: p es de la forma $\ldots 2222$. Entonces $p^{n-1} = \frac{p}{2} = \begin{cases} \ldots 1111 \\ \text{o} \\ \ldots 6111 \end{cases}$. Ninguno de los casos anteriores es posible.

Caso 2: p es de la forma $\ldots 4444$. Entonces $p^{n-1} = \frac{p}{2} = \begin{cases} \ldots 2222 \\ \text{o} \\ \ldots 7222 \end{cases}$. La primera situación se reduce al primero caso, que ya sabemos que no es posible. Si $\frac{p}{2}$ es de la forma $\ldots 722$, entonces $p^{n-2} = \frac{p}{4}$ es de la forma $\ldots 611$ lo cual es imposible.
Caso 3: p es de la forma $\ldots 6666$. Entonces $p^{n-1} = \frac{p}{2} = \ldots 3333$, lo cual es imposible.

Caso 4: p es de la forma $\ldots 8888$. Entonces $p^{n-1} = \frac{p}{2} = \begin{cases} \ldots 4444 \\ \text{o} \\ \ldots 9444. \end{cases}$ La primera situación se reduce al segundo caso, que ya sabemos que no es posible.

Si $\frac{p}{2}$ es de la forma $\ldots 9444$, entonces p^{n-2} es de la forma $\begin{cases} \ldots 4722 \\ \text{o} \\ \ldots 9722. \end{cases}$

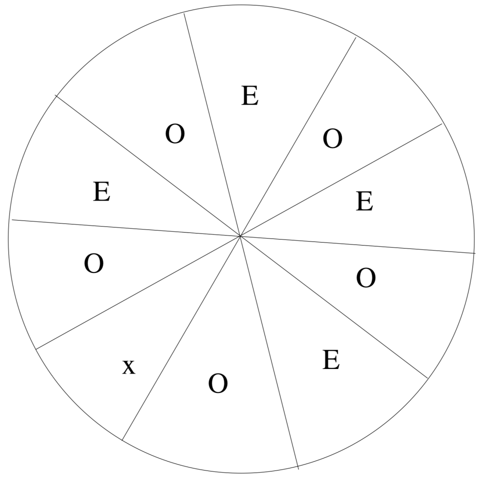
Si $\frac{p}{4}$ es de la forma $\ldots 4722$, entonces p^{n-3} es de la forma $\begin{cases} \ldots 2361 \\ \text{o} \\ \ldots 7361. \end{cases}$ Ninguno de los casos anteriores es posible.

Si $\frac{p}{4}$ es de la forma $\ldots 9722$, entonces p^{n-3} es de la forma $\begin{cases} \ldots 4861 \\ \text{o} \\ \ldots 9861. \end{cases}$ Ninguno de los casos anteriores es posible.

Todos los resultados con el mismo dígito al final repetido llevan a casos que no pueden suceder. Por lo tanto, no hay entero positivo que cumpla la condición inicial.

4. Un círculo está dividido en 10 rebanadas iguales. En cada rebanada hay 9 monedas, para un total de 90. En cada movimiento, se puede mover una moneda a cualquiera de sus dos rebanadas adyacentes (dos rebanadas son adyacentes si una está junto a la otra). ¿Es posible mover todas las monedas a una sola rebanada en exactamente 2004 movimientos?

   Solución: No es posible mover todas las monedas a un mismo sector en 2004 movimientos. Los movimientos solo pueden ser usados en pares (por ejemplo, mover una moneda fuera de su región y regresarla a su lugar original). Esto significa que se requieren una cantidad de movimientos par para poder lograrlo en 2004 movimientos.



La figura pasada divide al circulo en partes. Denotamos la región final por X. Los sectores denotados E son *pares*, y los denotados O son *impares*, refiriéndose a la cantidad de movimientos requeridos de mover una pieza de esa región a X. Como hay 5 sectores impares, un total de $5 \times 9 = 45$ monedas requieren una cantidad de movidas impares para llegar a X. Esto es un numero impar, y por lo tanto, 2004 es una solución imposible.

5. Resuelva para x:

$$\frac{1}{cos(x)} + \frac{1}{sin(y)} = 2\sqrt{2}$$

Solución: Primero, veamos que $x \neq \frac{\pi * n}{2}$, donde n es cualquier entero. Como

$$sin(x) + cos(x) = 2\sqrt{2}sin(x)cos(x)$$

uno obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{2}}sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}cos(x) = 2sin(x)cos(x).$$

Esto implica que

$$sin(x + \frac{\pi}{4}) - sin(2x) = 0.$$

Usando la identidad

$$sin(\alpha) - sin(\beta) = 2sin(\frac{\alpha - \beta}{2})cos(\frac{\alpha + \beta}{2})$$

uno obtiene

$$2sin(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2})cos(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0.$$

Por lo tanto, $\begin{cases} \frac{x-\frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \frac{3x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$

Y entonces, las soluciones son $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$ con n un entero.

6. Resuelva para x:

$$\frac{1-2\sqrt{1-x^2}}{x} \leq 1$$

Solución: Primero, obsérvese que $x \neq 0$ y $-1 \leq x \leq 1$. Entonces hay dos casos a considerar, $1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq 1$.
Caso 1: $0 < x \leq 1$
Multiplicando ambos lados de la desigualdad por x, se obtiene

$$1-2\sqrt{1-x^2} \leq x.$$

Luego,

$$1-x \leq 2\sqrt{1-x^2}.$$

Como $1-x \geq 0$, se sigue que

$$(1-x)^2 \leq 4(1-x^2)$$

y también

$$1-x \leq 4(1+x).$$

Por lo tanto, las dos restricciones obtenidas al resolver el sistema son $0 < x \leq 1$ y $x \geq -\frac{3}{5}$. La solución es entonces, en este caso, el intervalo $(0,1]$.
Caso 2: $-1 \leq x < 0$
Multiplicando ambos lados de la desigualdad por x, se obtiene

$$1-2\sqrt{1-x^2} \geq x.$$

Luego,

$$1-x \geq 2\sqrt{1-x^2}.$$

Como $1-x \geq 0$, se sigue que

$$(1-x)^2 \geq 4(1-x^2)$$

y también

$$1-x \geq 4(1+x).$$

Por lo tanto, las dos restricciones obtenidas al resolver el sistema son $-1 \leq x \leq 0$ y $x \leq -\frac{3}{5}$. La solución es entonces, en este caso, el intervalo $[-1,-\frac{3}{5}]$.

Uniendo las soluciones de ambos casos, se obtiene que el intervalo de existencia de x es entonces $[-1,-\frac{3}{5}] \cup (0,1]$.

7. Con los dígitos $\{2, 0, 1, 8\}$ se pueden formar números que contengan cada dígito una sola vez. ¿Cuál es la probabilidad de que el número resultante generado sea estrictamente mayor a 2018?

   Solución: Hay $4!$ (24) posibles combinaciones de los números, si contamos cuantas de ellas son mayores a 2018 obtenemos que estas son las que empiezan con 8 $(3! = 6)$, las que empiezan con 2 y luego tienen un 8 $(2! = 2)$, las que empiezan con 2 y luego tienen un 1 $(2! = 2)$ y la combinación que forma el número 2081 (1). Por lo tanto la probabilidad de que el número resultante sea estrictamente más grande que 2018 es $\frac{11}{24}$.

8. Uno de los seis dígitos de la expresión $435 \cdot 605$ puede ser cambiado para obtener un número tal que es un cuadrado perfecto de la forma N^2. Calcular N.

   Solución: Primero factorizamos los números, notamos que $435 = 5 \cdot 2 \cdot 29$ y que $605 = 5 \cdot 11^2$. Vamos a aprovechar el 11^2 y entonces podemos buscar una forma de cambiar los dígitos de 435 para que queden de la forma $5k^2$. Tomando los casos de k notamos que si $k = 3^4$ llegamos a que $5k^2 = 405$ y de aquí vemos con facilidad que $405 \cdot 605 = 3^4 5^2 11^2$ que claramente es un cuadrado perfecto.