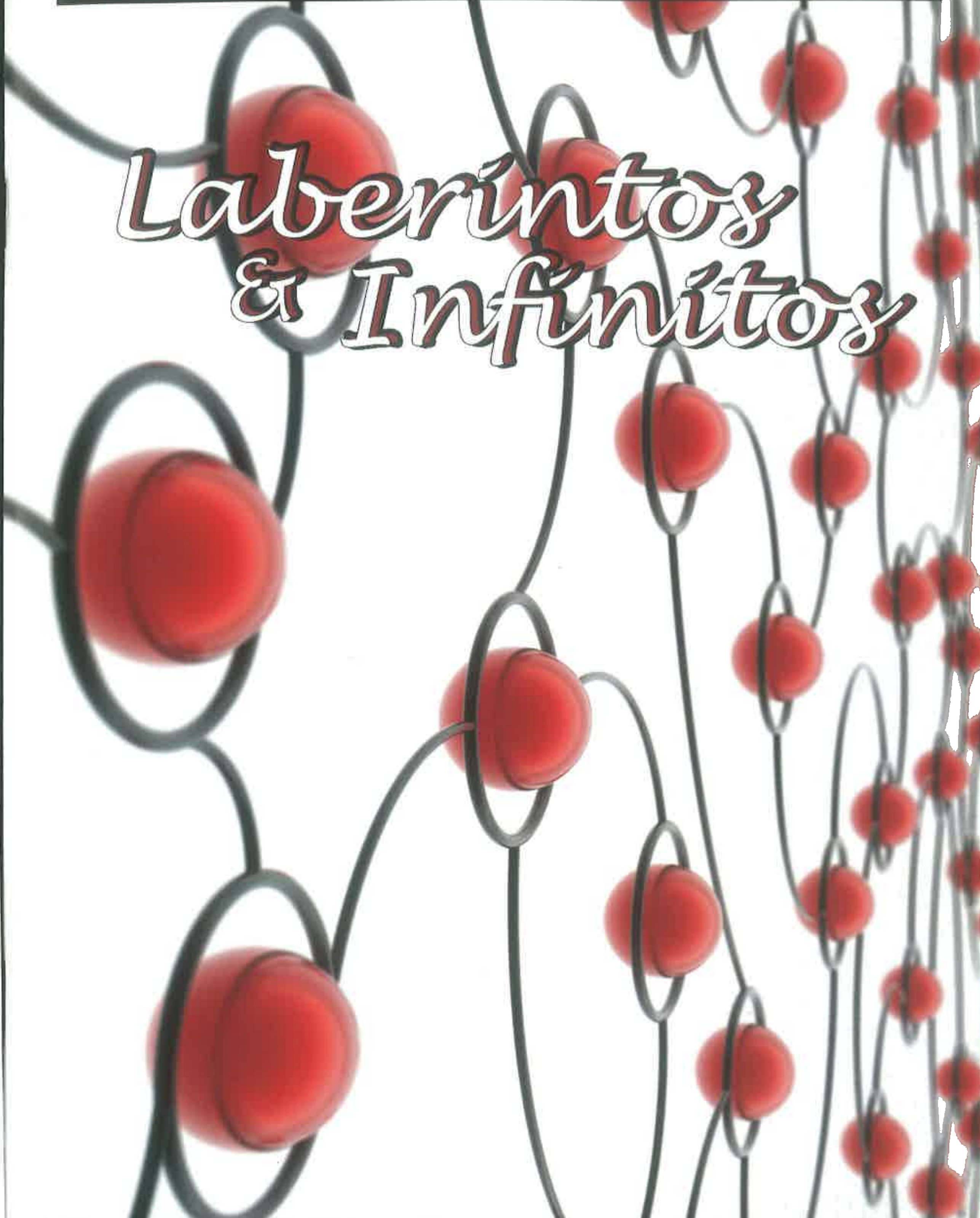
Revista de los alumnos de matemáticas y actuaría del ITAM

Laberintos & Infinitos



Número 16 / Nueva Época / Otoño 2008

ÍNDICE

Editorial

Los matemáticos tenemos un doble juego en la vida: por un lado vemos y velamos por la ciencia y el conocimiento, y por otro lado, tenemos una apreciación artística respecto a ese conocimiento. Podemos apreciar cuando una demostración es artística (de "El Libro") o si algún modelo es bello por su simplicidad y por sus resultados. Arte y ciencia se mezclan en un infinito universo: las matemáticas. Sumérgete en este laberinto, abre tu imaginación y deja que sus páginas te lleven por la melodía de las ideas.

Agradecimientos

Al Dr. Oswaldo Gaxiola por su participación en este número, así como a la Dra. Claudia Gómez y al Dr. José Luis Farah por sus interesantes artículos.

A los lectores de la revista quienes nos apoyaron con donativos.

A los departamentos de Matemáticas y Actuaría del Itam, así como al Consejo Universitario de Honor y Excelencia (CUHE), a Crea Consejo de Alumnos y a las representaciones Axioma, Echo y Factuarial por su apoyo económico.

A Grupo Inffinix y al Act. Carlos Rodríguez, quien sin su apoyo no podríamos seguir adelante.

A Diego Alonso Arenas por la nueva computadora para la revista.

http://laberintos.itam.mx
laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx
En la portada: Zulaut! productions

Se terminó de imprimir en Otoño de 2008, en la imprenta:
I.M. Impresores S. A. de C. V.
Andrés Molina Enríquez 825, Col. San Andrés Tepetilco, Iztapalapa, C. P. 09440.
El tiraje fue de 1800 ejemplares.

De Motu[1]

Sofía Bosch Gómez

Dra. Claudia Gómez Wulschner [2]

El pasado 15 de octubre se cumplieron 400 años del natalicio de un gran científico, uno de los físicos y matemáticos más significativos del siglo XVII. Nacido en 1608, en Faenza, Italia. Evangelista Torricelli contribuyó al progreso científico de su época, al igual que al progreso universal.

Proveniente de una familia sin recursos económicos, dedicada a la producción textil, el hijo de Gasparo Torricelli y Caterina Angetti demostró desde muy pequeño tener facilidad para el aprendizaje escolar. Sus padres sin poder otorgarle un mejor futuro, pero convencidos de su talento, decidieron mandarlo bajo la tutela de su tío Jacobo a Roma. Al principio entró a un colegio jesuita, aunque después gracias a las influencias de su tío pudo ser alumno de Benedetto Castelli, un fraile camaldulense y profesor de la Universidad de Sapienza. A cambio de las clases particulares que recibía de Castelli sobre matemáticas, mecánica, hidráulica y astronomía, Torricelli trabajó como su secretario particular, y llegó algunas veces a fungir como su suplente en algunas clases en la universidad cuando éste salía de Roma.

En una de estas ocasiones en que Castelli salió de Roma, Torricelli como su asistente, se vio en la necesidad de contestar la correspondencia que su tutor mantenía con Galileo. Aprovechando la situación, y siendo un joven emprendedor, escribió sobre sus propios avances matemáticos e investigaciones. En su carta Torricelli le comenta a Galileo sobre sus estudios en los textos de Apolonio, Arquímedes, y Teodosio, así mismo menciona su interés en las investigaciones de matemáticos contemporáneos como Kepler, Brahe, y Longomontanus, y finalmente le hace saber sobre su convencimiento de la teoría copernicana del heliocentrismo[3]. Es evidente por su escrito que Torricelli estaba fascinado por la astronomía y era un gran seguidor de Galileo. Conocemos muchas de sus ideas por Torricelli:

> *La Tierra, el Sol y Júpiter rotan sobre su eje y provocan con ello un torbellino en el éter que arrastra a la Luna, los planetas y los satélites de Júpiter...*

1. Sobre el movimiento.
2. Profesora del departamento de Matemáticas del ITAM.
3. Teoría astronómica sostenida fundamentalmente por N. Copérnico, astrónomo polaco de fines del siglo XV, que consideraba el Sol como centro del universo.

Galileo sorprendió a sus contemporáneos anunciando,en Sidereus Nuncius (El Mensajero Celeste o Aviso Astronómico), una serie de descubrimientos astronómicos importantes que habían sido posibles gracias a la por entonces reciente, invención del telescopio. Torricelli, siguiendo los pasos de Galileo, hizo un gran trabajo como constructor de telescopios y como incansable observador del cosmos y fascinado por los instrumentos que Galileo había construido mostró otra virtud: fue un gran diseñador y creador de diversos instrumentos ópticos y de observación.

Realizó muchas mejoras en el telescopio, y luego en el microscopio, por medio de las diferentes lentes que él mismo producía. Las lentes de Torricelli utilizadas en un telescopio y revisadas cuidadosamente en 1924, son ejemplo de perfección y de exquisita artesanía por la precisión con la que fueron construidas [3]. Se le atribuyen también los mejores anteojos de la época y se dice que obtuvo mucho dinero y muchos obsequios por sus habilidades en la construcción de lentes durante la última parte de su vida en Florencia.

Cuando en 1633 Galileo fue juzgado por la inquisición sobre sus descubrimientos, Torricelli se dio cuenta de que estaba expuesto a un gran peligro si seguía apoyando las teorías de Copérnico, por lo cual se dedicó a investigaciones matemáticas y físicas menos polémicas. Cuando la controversia fue dejada atrás, Castelli viendo el talento de su pupilo, se puso en contacto con Galileo para que éste le acogiera como su aprendiz. Lo que ocurrió fue lo siguiente: En 1641, Torricelli, tenía una gran cantidad de resultados y de investigación que publicó, en 1644, en un solo libro, *Opera Geometrica*. La segunda parte de este libro, considerada la más importante e intitulada *De Motu Gravium* presenta entre otros, un cuidadoso estudio del movimiento parabólico ya trabajado por Galileo.

Por eso desde 1641, Galileo lo aceptó como asistente a petición de Castelli. Aunque fue hasta 1642 que Torricelli se mudó a Arcetri donde ejerció los últimos tres meses de la vida de Galileo como su asistente. Después de la muerte de éste, Torricelli se mudó definitivamente a Florencia donde se convirtió en un miembro de la Academia de Florencia y fue nombrado filósofo y matemático a los servicios del duque Fernando II de Toscana.

Este período es de gran importancia porque en 1643 realizó el descubrimiento del principio del barómetro, que demostraba la existencia de la presión atmosférica, y por el que pasó a la posteridad. La unidad de medición presión "torr" fue nombrada en su honor.

Veamos con más detalle esto, desde la antigüedad los filósofos griegos consideraban que el vacío significaba falto de contenido y esto fue un obstáculo para la aceptación de su existencia y más aún, para el entendimiento de los principios tecnológicos básicos del mismo. Fue hasta 1640 cuando el italiano Gasparo Berti realizó el primer experimento con el vacío. Motivado por un interés en diseñar un experimento para el estudio de los sifones, Berti pretendía aclarar el fenómeno como una manifestación de diferencia de presión de aire en la atmósfera. Diseñó y construyó entonces, un barómetro de agua, el cual resultó capaz de producir vacío.

Al analizar el informe experimental de Berti, Evangelista Torricelli captó con claridad el concepto de presión de aire, por lo que diseñó, en 1643, un dispositivo para demostrar los cambios de presión en el aire. Construyó un barómetro que en lugar de agua empleaba mercurio, y de esta manera, sin proponérselo, comprobó la existencia del vacío.

El barómetro de Torricelli constaba de un recipiente y un tubo de 76 cm lleno de mercurio (Hg) cerrado en uno de sus extremos. Al invertir el tubo dentro del recipiente se formaba vacío en la parte superior del tubo. Esto era algo difícil de entender en su época, por lo que se intentó explicarlo diciendo que esa región del tubo contenía vapor de mercurio, argumento poco aceptable ya que el nivel de mercurio en el tubo era independiente del volumen del mismo utilizado en el experimento. Torricelli aseguraba la existencia de la presión de aire y decía que debido a ella el nivel de mercurio en el recipiente no descendía, lo cual hacía que el tamaño de la columna de mercurio permaneciera constante dentro del tubo.

Continuó entonces con los experimentos para obtener una buena explicación del fenómeno. Observó que al disminuir la presión del aire, por ejemplo en un sitio más alto, como una montaña, el nivel de mercurio en el recipiente subía y en la columna, dentro del tubo, bajaba inmediatamente.

La gran idea con la que Torricelli le dio un golpe final a la cuestión la plasmó en la construcción muy ingeniosa, de un barómetro de mercurio que contenía en la parte vacía del tubo, otro barómetro para medir la presión de aire en esa región. Se hicieron muchas mediciones y el resultado fue que no había una columna de Hg en el tubo del barómetro pequeño porque no se tenía presión de aire. Esto aclaró que no existía vapor de mercurio en la parte vacía del tubo. Más todavía, se puso en evidencia la presión del aire y, lo más importante, la producción y existencia del vacío. (La figura muestra el barómetro de Torricelli)

En resumen y para entender mejor la trascendencia de sus descubrimientos sabemos que una manera de medir la presión atmosférica es con un barómetro de mercurio. Su valor se expresa en términos de la altura de la columna de mercurio de sección transversal unitaria y 760 mm de alto. Con base en esto decimos que una atmósfera (atm) estándar es igual a 760 mm Hg (milímetros de mercurio). Actualmente se utiliza por conveniencia la unidad Torricelli (torr) como medida de presión y entendemos 1 torr = 1 mm Hg, por lo que 1 atm = 760 torr; por lo tanto 1 torr = 1/760 de una atmósfera estándar, o sea 1 torr =1.136 x 10-3 atm.

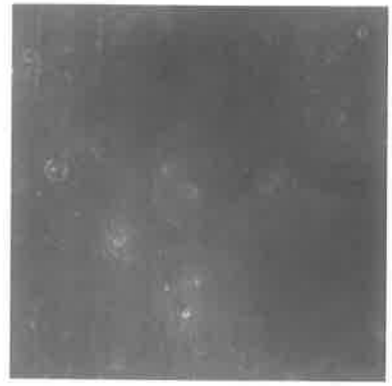
Torricelli es además célebre por su investigación en matemáticas. Era un gran geómetra y estaba al tanto de los cálculos que hacía Cavalieri para obtener áreas y volúmenes utilizando infinitesimales. Recordemos que aún no se tenía el concepto de límite, así que el trabajo de Torricelli es muy fino porque además de adoptar las técnicas del momento, trató de ponerlas en un contexto muy aceptado en esa época, que era precisamente a la luz de la geometría. Es por eso que sus demostraciones y sus deducciones en general iniciaban con la frase: *de acuerdo con las ideas de los grandes geómetras de la antigüedad...*

Se le reconoce además el descubrimiento de un sólido infinitamente largo llamado hoy en día el Cuerno de Gabriel que se caracteriza por tener una superficie infinita pero que encierra un volumen finito. Este descubrimiento fue apreciado en aquélla época como una especie de paradoja, algo increíble, incluso para el propio Torricelli, provocando una fuerte polémica en torno a la naturaleza del infinito. Actualmente no hay libro de Cálculo Diferencial e Integral que no contenga este ejemplo y como en aquellos tiempos, causa una gran impresión.

Admirables son también sus trabajos sobre secciones cónicas, especialmente parábolas, su trabajo minucioso sobre el centro de gravedad de ciertas figuras, su estudio sobre la cicloide y finalmente su solución al problema que había propuesto Fermat en 1600. Torricelli encontró el punto, llamado Isogónico, desde el cuál la distancia a tres puntos dados, es mínima.

No podemos dejar de mencionar la proposición que se conoce como el teorema de Torricelli, que establece que si tenemos un recipiente con líquido que llega a una cierta altura H, y que si tal recipiente tiene un orificio a una altura h menor que la anterior, entonces la velocidad con la que el líquido sale por el orificio está dada por la raíz cuadrada del doble del producto de la altura h y de la aceleración de la gravedad. En realidad se trata de una aplicación de lo que más de un siglo más tarde fuera conocido como el principio de Bernoulli en hidrodinámica.

El 25 de octubre de 1647, a la corta edad de treinta y nueve años Torricelli murió a causa de tifoidea. Horas antes de su muerte, comprendió que no había publicado, excepto en conferencias o en cartas, la mayor parte de su gran investigación y trató de encargar sus escritos a sus más cercanos amigos para que su trabajo fuera publicado, hecho que nunca sucedió. Aún cuando mucho de este material y de sus instrumentos se conservaban en el Museo Torricelli de su ciudad natal, en su mayoría se perdieron en 1944. Lo que no se ha perdido afortunadamente es la admiración y el profundo respeto por su legado científico.



El cráter de la Luna llamado Torricelli en su honor, aparece en el centro de esta fotografía tomada con el satélite Clementine

Datos para su localización:
Latitud: -4.6
Longitud: 331.5
Tamaño: 22 kilómetros

Referencias

[1] Ellis R. and D. Gulick. *Calculus with Analytic Geometry.* USA, Harcourt, Brace, Jovanovich. 4th edition, 1990.

[2] Feliu Castelló,S. *Ciencia y verdad.* España. Colección Filosofía. Las propuestas en sus textos. Universitat de València, 1901.

[3] Gliozzi, *M. Evangelista Torricelli* en Dictionary of Scientific Biography. New York 1970-1990

[4] O'Connor, J.J. and E F Robertson, *Evangelista Torricelli*, (DE, 30 de octubre, 2008: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Torricelli.html)

[5] Talavera, Laura y Mario Farías. *El vacío y sus aplicaciones.* México. Colección : La Ciencia desde México. Fondo de Cultura Económica, 1995.

[6] US Naval Research Laboratory , Clementine Satellite, DE, 29 de octubre, 2008: http://www.cmf.nrl.navy.mil / clementine/clib/

[7] Westfall, R. *E. Torricelli*, (DE, 31 de octubre, 2008: http://galileo.rice.edu/Catalog/NewFiles/toriceli.html)

[8] Wikipedia, *Evangelista Torricelli*, (DE, 30 de octubre, 2008: http://es.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli)

Átomos, polen, especulación y Matemática

Dr. José Luis Farah.
Director de la carrera de Matemáticas Aplicadas del ITAM

Introducción

En este breve recuento se procura delinear muy brevemente la forma en que varias ideas se fueron enlazando para producir uno de los más finos productos de la Matemática y sus aplicaciones, el movimiento browniano. La historia comienza con el increíble suceso de olvido de la idea del átomo por 2200 años. De la conjetura de su existencia para formar moléculas y de la corroboración de las mismas y medición de sus números, masas, tamaños y velocidades promedio. Sorprendentemente, la observación en 1827 de partículas de polen en suspensión por el botánico **R. Brown**, proveé el vínculo necesario para que Einstein cree la liga necesaria para que en 1908, hace justo 100 años, Jean Perrin, haga los experimentos que verifiquen la existencia molecular. Hasta el color azul del cielo fue utilizado para proveer de un método adicional. **J. Perrin** recibe el Nobel de Física en 1926. En paralelo, surge la teoría matemática de funciones continuas no diferenciables y de su modelamiento en términos probabilísticos. El movimiento browniano modelado por **Norbert Wiener** en 1921 es el paradigma por excelencia de ellas. Ahora contamos con dos joyas. La existencia asegurada de los átomos y de sus moléculas desde hace apenas un siglo, y la teoría completa de procesos estocásticos desarrollada desde entonces.

Los átomos

La idea de que la materia está compuesta por unidades indivisibles (*átomos*), la heredamos en occidente de los pensadores griegos. Los historiadores de la ciencia y de la filosofía están de acuerdo en señalar a **Leucipo** y a **Demócrito**, que vivieran alrededor de 440 a.C., como los principales representantes antiguos de este pensamiento. Según **B. Russell** ([1]. pp10-47), las ideas atomistas no fueron un disparo especulativo en la oscuridad, sino que eran respuesta a 150 años de tradición de ideas y observaciones de ilustres pensadores helénicos (como Parménides, entre otros). Para **Leucipo** y **Demócrito** la materia debería estar constituida por partículas indivisibles y duras que puestas en movimiento daban origen a todo lo sensible. En cuanto al tamaño de las mismas, se oscilaba en opinión entre muy chico y muy grande. Desde luego, nunca hubo un intento de medir sus tamaños ni de desarrollar una metodología para realizar semejante proeza.
Vale la pena exhibir algunos de los argumentos griegos tomados de ([2], p.68-70)

1. **Leucipo** pensaba que los átomos eran indestructibles y que se combinaban en movimiento para producir los cuerpos sensibles
2. **Demócrito** argumentaba que la indestructibilidad de los átomos no era consecuencia de su pequeñez, sino de su naturaleza dura. Para él podían existir átomos tan grandes como un mundo, aunque invisibles.

3. Por supuesto, se dice, los átomos son absolutamente homogéneos y su movimiento en el vacío es eterno e incausado, y se mueven desde siempre y por necesidad en todas direcciones

De nuevo, **B.Russell** ([*op. cit.*]) nos reafirma una visión simple y acertada del atomismo. Se refiere a un filósofo francés moderno **E. Meyerson**. Según este último, el atomismo es muy natural en el pensamiento occidental, en tanto que para explicar formas y cuerpos visibles, utilizamos cuerpos más simples y pequeños que dotados de ciertas propiedades, conforman lo sensible. A su vez, y en su oportunidad, tales átomos podrán posteriormente (segun evidencia que surgiera) ser explicados en sus propiedades por partículas sub-átomicas que no se habian observado y de ese modo se procede *ad infinitum.*
Sin abundar mayormente en este asunto, el propóstito del recién terminado *gran acelerador hadrónico* es justo el de romper la materia mas allá de toda experiencia vigente para averiguar la estructura subyacente de la misma, y avanzar en nuestra comprensión de la misma.
Es muy sorprendente que transcurren aproximadamente 2200 años hasta 1803 en nuestra era, que gracias a las leyes de composición química del inglés **John Dalton** y basadas en el concepto de átomo y de molécula, que se revive el atomismo griego, y se revitaliza sin precedentes. Es un verdadero misterio en la historia humana la forma en que una idea puede caer en el olvido por dos milenios para aparecer después con gran fuerza, tal como lo hace el atomismo (otro claro ejemplo de un fenómeno muy similar es la Matemática revitalizada en el Renacimiento).
En el caso del atomismo, la idea fue retomada esporádicamente por **Giordano Bruno**, **René Descartes** e **Isaac Newton**, entre otros. Por ellos fue esgrimida como idea filosófica y no como una hipótesis efectiva de trabajo para penetrar nuestra visión de la materia. Notablemente, **Daniel Bernoulli** en su libro *Hydrodinamica* de 1738, explica la presión de un gas como inversamente proporcional a su volumen(**Ley de Boyle**). Esto lo hace basado en la idea de *particulas en movimiento de dimensiones pequeñas* en comparación a sus distancias promedio, y es en esencia el primer resultado de la Física de partículas.
J. Dalton resume su visión en 1808 en su libro [3] y desde entonces esta visión forma parte de nuestro conocimiento que se enseña en nuestras escuelas.
Simultáneamente en 1811, el italiano **A. Avogrado** postula respecto de las masas de gas que se encuentren a la misma temperatura y presión.

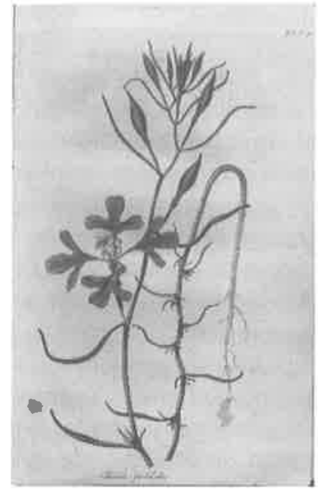
> *Los mismos volúmenes de diferentes gases, están conformados por el mismo número de partículas*

Cabe ahora la pregunta,

> *¿Son estas partículas las mismas que las moléculas daltonianas, y tienen que ver con las moléculas de Bernoulli?.*

Para cuando el siglo XX comienza, la existencia de estas partículas, moléculas o átomos no era más que una hipótesis de trabajo o de especulación filosófica (ciertamente satisfactoria y con una ilustre génesis en el pensamiento occidental).
Para responder la pregunta hecha, falta una historia más.

R. Brown y sus flores Una estrella y tres extras



El botánico de origen escocés, **Robert Brown**, responsable de grandes colecciones de la Sociedad de Lineo en Londres y del Museo Británico, hace una observación muy importante (1827). Él ya había descrito con detalle el momento de fecundación del gineceo de las flores, y ahora dedicaba sus esfuerzos a describir la contraparte masculina contenida en las anteras. Todo esto, haciendo gala de sus habilidades de microscopista extraordinario. De una bellisima florecita (mide aprox. 2cm de largo) traída de las Montañas Rocallosas (*clarkia pulchella*) y con su buen instrumento óptico, logró poner en suspensión líquida a pequeñas partículas extraídas del polen de las flores. Estas partículas mostraron un movimiento agitado, irregular e incesante. Según los observadores modernos la aparición de este estado agitado es definitivamente inconfundible para el microscopista avezado, y Brown fue uno de ellos.

Se fueron descartando sucesivamente las posibles causas del singular movimiento: cambios de temperatura en el cuarto, portaobjetos opresores, corrientes de aire y de agua, entre otros. Lo que era evidente, fue que el moviemto era incesante.

Como objeto de estudio, *clarkia*, fue la estrella. Para corroborar que este moviemiento *no era propio de la vida*, sino de cualquier partícula que se encontrase en una supensión similar dentro de un líquido, el mismo **Brown** sometió a un drástico tratamiento a otros vegetales a los que llamó las tres extras sólo por afán de distinguir la una de los otros: *Viola tricolor* (pensamiento), *Zizania aquatica* (la flor del arroz salvaje) y a *Zea mays* (nuestro maíz cimarrón o teocintle). Los extras fueron sumergidos por once meses en alcohol. Después de semejante baño, el resultado de las nuevas observaciones mostró que el movimiento irregular e incesante se recuperaba como si nada hubiera sucedido a los tejidos vivos- que estaban más muertos que una piedra caliza- Con esto, en 1827, el gran biólogo descartó que el movimiento se debía a alguna fuerza vital y la imputó a la

> *existencia de moléculas que empujan a las partículas bajo observación hacia todos lados, sin una dirección preferencial.*

Una página electrónica de información detallada, nos la brinda Brian J. Ford ([4]) quien inclusive participó en la recreación de las observaciones brownianas con reconstruccción del micropscopio de la época y demás parfernalias.

Wiener, Gouy y más Wiener

Christian Wiener en 1863 (**Norbert Wiener** nace en 1895, su padre es **Leo Wiener,** ¡nada que ver!) estudia el movimiento browniano y reporta que efectivamente se debe a la agitación de partículas bombardeadas incesantemente por las moléculas del líquido y desde luego, la temperatura es un factor importante. **Charles Louis Gouy** en 1889 además descarta que el movimiento dependa de cambios de temperatura, y de corrientes líquidas producidas por efectos capilares entre el portaobjetos y el cubreobjetos del microscopio que se utilizaban en las observaciones. Además, establece del movimiento,

> *su dependencia inversa con el tamaño de las partículas en suspensión y de la viscosidad del líquido en que se encuentren.*

En esencia, ambos establecen experimentalmente la realidad del movimiento en la forma más objetiva y cuantitativa posible.
También les queda claro, que

> *el movimiento de las partículas suspendidas parece no tener principio ni fin y sus caminos no poseen tangente alguna, no puede hablarse de una trayectoria.*

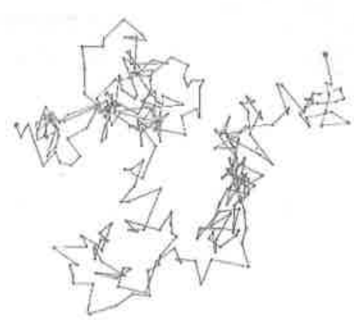
En ningún momento existe la posibilidad de trazar una direccion tangente a posiciones sucesivas, a pesar de que se observen las posiciones sucesivas con finura extremada.
Sin embargo existe una **ley de desplazamiento**:

> *el promedio del cuadrado de los deplazameintos es porporcional al tiempo de observavion de los mismos.*

Como dato biográfico de esta seccion, debe advertirse que **Otto Wiener** del Instituto de Física de la Universisad de Leipzig publica en 1927 un articulo dedicado a **Christian** en el centenario de su muerte. En este artículo se destaca el papel importantísimo de los trabajos de **Christian W**. respecto del movimiento browniano así como su labor como maestro de Geometría Descriptiva, entre otros atributos de este hombre singular.
Wiener es en el idioma alemán, el gentilicio de Viena (Wien) asi como berliner lo es de Berlin. Desde luego que existen muchos Wiener de parentescos variados y multiples.

Entran A. Einstein, M. Schmoluchowsky, el azul del cielo y J. Perrin en 1908

En 1905, **Albert Einstein** es un físico laborando en la ofici na de patentes de Berna en Suiza. En la mente colectiva todavía no es el Dr. Einstein. Se dedica a escribir una serie de tres artículos en que se vinculan las Teorías de hidrodinámica y de mecánica estadística (recientemente creada) para explicar en forma definitiva al movimiento browniano como producido por golpes azarosos de las pequeñitas moléculas de un líquido sobre las partículas que se encuentren flotando en él. La costura de las ideas la realiza magistralmente con un argumento probabilístico y de termodinámica, que en esencia postula que en equilibrio las inquietas moléculas de un gas (o de un líquido), (1) no muestran una preferencia direccional, (2) se mueven independientemente unas de las otras y (3) sus velocidades aumentan absorbiendo energía de su alrededeor, mientras que disminuyen en dándola al medio. Estas dos cosas ocurren de modo compensatorio.



Sin que demos los detalles, **Einstein** logra la fórmula siguiente para el promedio de los cuadrados desplazamientos obsrvados en un tiempo τ (la sobrebarra significa promedio)

$$\frac{\overline{\Delta x^2}}{\tau} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi r\eta} \tag{1}$$

donde r es el radio de la partícula en suspensión, η es la viscosidad del líquido suspensor, la temperatura del líquido es T (en grados Kelvin), R es la constante universal de los gases y N es el numero conjeturado por **Avogrado** de moléculas en un volumen de referencia (22.4 litros). En esta fórmula todo es conocido o medible excepto N, y el mismo Einstein sugiere expermientos para determinar el importantísimo número.

Por otro lado, el croata **Marian Schmoluchowsky** en 1907 relaciona el número de Avogrado con la medición de la opalescencia de ciertos líquidos y a su vez, estas fórmulas (que no escribimos) están relacionadas *con la intensidad del color azul de cielo que obtuvo* ***Rayleigh*** *en* 1887.

Jean Perrin obtiene el premio **Nobel** de Física de 1926 por haber corroborado en 1908 de muchos modos distintos y experimentalmente el valor del número de Avogrado que es hoy aproximadamente $N \approx 60{,}22 \times 10^{22}$. En todos los métodos se utiliza como hipótesis fundamental la existencia de las moléculas, para producir fórmulas que relacionan N con alguna propiedad observable de gases o líquidos. ¡El éxito es rotundo!

¡Este año, 2008, cumplimos un siglo de que se cuantificaron las moléculas, sus tamaños, sus masas y sus diámetros! La historia está descrita a detalle por el mismísimo laureado en ([5]).

La Matemática del Movimiento Browniano

En esta sección sólo nos ocuparemos de mencionar que la posibilidad matemática de describir el movimiento browniano tiene su origen en los trabajos de análisis de **B. Riemann, H. Hankel, K. Weierstrass, G. Cantor y U. Dini**, entre otros, que se ocuparon en la última mitad del siglo XIX de la difícil tarea de discernir cuándo una función (de una variable real) y con valores reales podía ser continua sin ser diferenciable. Antes de sus trabajos, no quedaba clara la separación de los dos conceptos en comento, y en muchas ocasiones, francamente se confundían([6]). Con el establecimiento seguro de funciones continuas sin tangentes, se cuenta con una base para modelar el movimiento errático de las partículas de R. Brown. El eminente matemático **Emile Borel**, está muy consciente de esta situación y presenta un discurso inaugural de la Universidad de **Rice** en Tejas en 1900, en el cual relaciona el movimiento molecular con la matemática de las funciones no diferenciables.

Es **Norbert Wiener** la persona que consolida la matemática sólida del movimiento browniano, y nos permite concluir todos sus aspectos experimentales a partir de axiomas probabilísticos y de análisis. Esto sucede alrededor de 1921.

A su construcción probabilística se le llama hoy en día como proceso de Wiener o browniano, y consta de una colección continua $\{X_t\}$ de variables aleatorias con el índice $t \geq 0$, y que satisfacen:

a. $X_0 = 0$

b. Con $s < t$, el incremento $X_t - X_s$ es una variable normal de media cero y de varianza $t - s$,

c. $X_t - X_s$ es independiente de la colección $\{X_u : u \leq s\}$

Bastan estos tres postulados para demostrar:

1. Para cualquier partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \tau$, se tiene que con probabilidad 1, el límite
$$\sum_{k=1}^{n}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = \tau \tag{2}$$
2. Con probabilidad 1 las trayectorias $t \longmapsto X_t$ son continuas y no diferenciables
3. Con probabilidad 1 las trayectorias $t \longmapsto X_t$ son de variación no acotada.

Comentario 1. *La continuidad de las trayectorias es deseable para modelar partículas que no puede desaparecer en el tiempo. La no diferenciabilidad es una propiedad deseable para modelar el movimiento errático y sin dirección de las partículas, y desde luego (2) remeda la ecuación einsteniana (1), excepto por una constante que es* $\sqrt{\frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi r\eta}}$.

Comentario 2. *Al mismo tiempo, en su tesis doctoral* ***L. Bachelier****, en 1900 e intitulada* ***La Especulación****, crea un modelo de fluctuaciones de precios de las acciones en la bolsa de valores de París por medio de un modelo que hoy reconocemos como la matemática misma del movimiento browniano y que cumple con los postulados mencionados con anterioridad impuestos por Wiener. El estudio de Bachelier sobre la especulación está reportado ampliamente en la tesis de licenciatura ([7]). El proceso de Wiener es un elemento fundamental en muchos aspectos de la Matemática, y juega un papel importantísimo en todas las aplicaciones de Ingeniería donde se apliquen conceptos de procesamiento de mensajes y de control. Se utiliza también en Finanzas para modelar precios como lo hiciera* ***Bachelier****.*

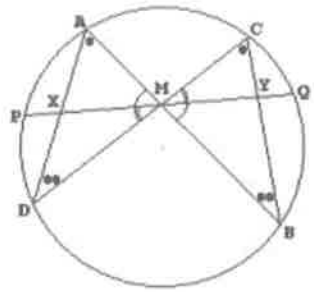
Bibliografía

[1]. Russell, Bertrand, *Wisdom of the West*, MacDonald and Co. Publishers, Reprint, 1975.
[2] Leucipo y Demócrito, *Fragmentos*, Biblioteca de Iniciación Filosófica, No. 91, Aguilar, Argentinas, 1964
[3] Dalton, John, *A New System of Chemical Philosophy*, citado en la Encicl.. Britannica, y en Internet.
[4] Ford, Brian J. *http:// www. brianjford.com/wbbrown.htm*
[5] Jean Perrin, *Atoms*, Ox Bow press, reprint, 1990, el original es *Les Atomes*, Librairie, F. Alcan, 1913
[6] Hawkins, Thomas, *The. Lebesgue´s Theory of Integration*, Chelsea, reprint,. 1979
[7] Higashida G., Cristina, *Estudio sobre la Teoría de la especulación de Louis Bachelier 100 años después*, tesis, ITAM, 2000

El Teorema de la Mariposa

Kael Huerta.
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM.

Antes de convertirse en teorema, el problema de la mariposa fue publicado por vez primera en la revista inglesa "The Gentleman's Diary" (1815) y uno de los primeros matemáticos en resolverlo fue William George Horner (famoso por el algoritmo que lleva su nombre) aunque existen muchos que lo han trabajado como Coxeter, Shklyarsky y Greitzer, entre otros.
El problema es el siguiente: Dada una cuerda PQ de un círculo con centro medio M, trace cualquier otro par de cuerdas AB y CD que intersecten en M. Llame a los puntos donde AD y BC cruzan a PQ como X y Y. Entonces M es también el punto medio de la recta XY.

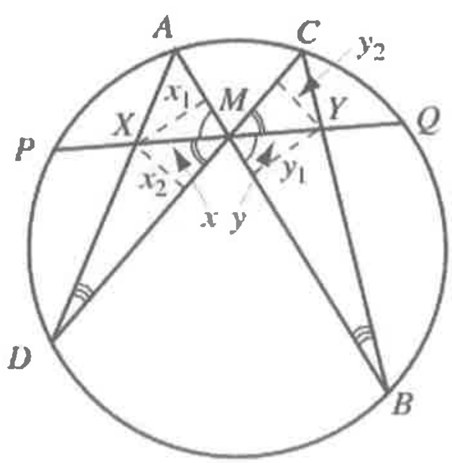


Prueba 1: Coxeter y Greitzer

Tracemos líneas perpendiculares x_1 y y_1 de X y Y a AB, luego x_2 y y_2 de X y Y a CD. Y sean

$$a = PM = MQ \quad x = XM \quad y = MY$$

como sugiere la siguiente figura:



Ahora notemos que por triángulos semejantes obtenemos las siguientes igualdades:

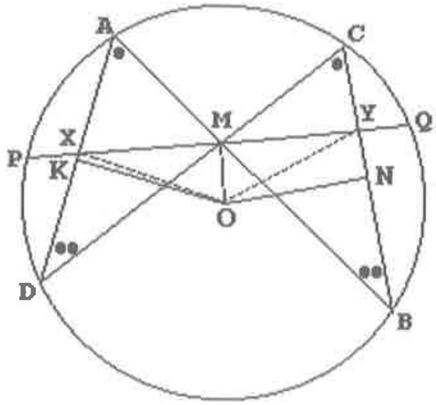
$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY} \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB}$$

De las cuales es fácilmente demostrable que:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1x_2}{y_1y_2} = \frac{AX \cdot XD}{CY \cdot YB} = \frac{PX \cdot XQ}{PY \cdot YQ} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Con lo que $x = y$ y el teorema queda demostrado.

Prueba 2: Shklyarsky



Sea O el centro del círculo dado. Como $OM \perp XY$, para mostrar que $XM = MY$ tenemos que probar que $\angle XOM = \angle YOM$. Tracemos perpendiculares OK y ON de O a AD y BC respectivamente. Evidentemente K es el punto medio de AD y N es el punto medio de BC. Entonces podemos observar que

$$\angle DAB = \angle BCD \quad \angle ADC = \angle ABC$$

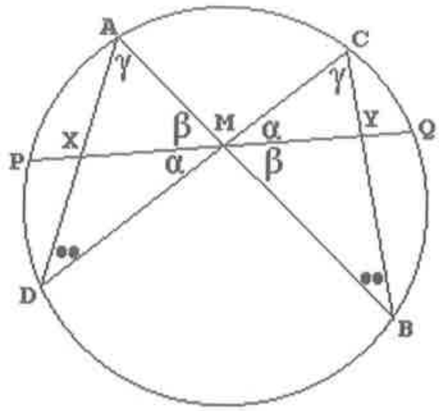
Por lo tanto, los triángulos ADM y CBM son semejantes y al menos una de las siguientes afirmaciones se cumple:

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BC}{CM} \quad \frac{AK}{AM} = \frac{CN}{CM}$$

En otras palabras, en los triángulos AKM y CNM dos pares de lados son proporcionales. También los ángulos entre dichos lados son iguales. Inferimos que los triángulos AKM y CNM son similares. Por lo tanto $\angle AKM = \angle CNM$.
Ahora, si observamos los cuadriláteros $OKXM$ y $ONYM$ notamos que ambos tienen un par opuesto de ángulos rectos, lo que implica que ambos los podemos inscribir en una circunferencia. Entonces en $OKXM$, $\angle AKM = \angle XOM$, mientras que en $ONYM$, $\angle CNM = \angle YOM$. Por lo que obtenemos lo que queríamos demostrar: $\angle XOM = \angle YOM$.

Prueba 3: Shklyarsky

Nombraremos a los ángulos como sugiere la siguiente figura:



Y sean $x = XM$ y $a = PM$. Como vimos en la prueba 1,

$$AX\ XD = PX\ XQ = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2$$

En el triángulo DXM por la ley de los senos, tenemos que:

$$DX = \frac{x\sin(\alpha)}{\sin(180 - (\alpha + \beta + \gamma))} = \frac{x\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$$

Y en el triángulo AXM $AX = \frac{x\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$ de donde obtenemos

$$AX\ DX = \frac{x^2\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\gamma)\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = a^2 - x^2$$

y despejando x^2:

$$x^2 = \frac{a^2\sin(\gamma)\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\gamma)\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$$

Pero esta última expresión es simétrica en α y β luego entonces, si repetimos el proceso para el segmento $y = MY$ obtenemos exactamente el mismo resultado. Por lo tanto $x = y$.

Taller de Matemáticas en la industria

Carlos Javier Garrido
Juan Pablo de la Vega
Estudiantes de Matemáticas Aplicadas del ITAM

Los talleres de "Matemáticas en la Industria" son una variante del ESGI (*European Study Group with Industry*), el taller líder en Europa sobre la interacción entre matemáticos y la industria. Estos talleres, de una semana de duración, se han venido realizando desde 1968 y en un principio eran denominados *Oxford Study Groups with Industry*. La finalidad es atraer a matemáticos líderes para trabajar en problemas relacionados con el ámbito industrial.

Los grupos de estudio son organizados por diferentes universidades en Europa y se han organizado eventos similares en Australia, Estados Unidos y otros países. En ellos, se invita a trabajadores de investigación industrial y comercial a presentar algunos de los problemas técnicos que enfrentan, para ser estudiados junto a especialistas líderes de la comunidad académica. Los problemas expuestos pueden provenir de una gran variedad de áreas, el único requisito es que sean susceptibles a modelación matemática.

En una semana llena de lluvias de ideas y modelación, lo primero que se hace es discutir ideas y desechar algunas, para que las restantes sean revisadas con más detalle. La verdadera investigación puede empezar hasta finalizado todo este proceso, y para llevarla a cabo se hacen contactos entre los matemáticos participantes para trabajar juntos.

Se han tratado problemas que pueden ser modelados con mecánica continua, tales como transferencia de masa y calor, flujo de fluidos, materiales granulares, campos eléctricos, derivados financieros y estrategias domésticas; pero en principio no hay limitaciones para el tipo de matemáticas utilizadas o para las áreas a tratar. Otra función que realizan estos talleres, particularmente importante, es la de crear un vínculo entre los departamentos de Matemáticas de las universidades representadas por los participantes, y más aún, un vínculo entre dichos departamentos y la industria en general.

Pero como ya se mencionó, todo lo anterior está enfocado a los matemáticos y académicos solamente. Debido a ello, surgió la idea de organizar eventos similares pero con la participación de la comunidad estudiantil, con la finalidad también de fomentar la cooperación y el intercambio de ideas. El primer taller de este tipo fue realizado en 1988 en Bari, Italia y en los años siguientes se llevaron a cabo otros en las ciudades de Kaiserslautern, Alemania; Oxford, Inglaterra; Eindhoven, Holanda; Linz, Austria; Grenoble, Francia y California, EUA.

En nuestro país, los talleres estudiantiles iniciaron en 1994 con el "Primer Taller de Modelación Matemática para Estudiantes". Fue organizado por el Comité de Matemáticas y Sector Productivo de la Sociedad Matemática Mexicana y fue el primer evento de su tipo fuera de Estados Unidos y Europa. El taller estuvo coordinado por el Doctor Alistair Fitt de la Universidad de Southhampton, Inglaterra, como parte del proyecto de colaboración con el EMCI (*European Consortium for Mathematics in Industry*). En él participaron 34 estudiantes de instituciones públicas y privadas, y 5 doctores, quienes fungieron como líderes de los grupos. En el ITAM, los talleres de matemáticas e industria para estudiantes se han venido realizando desde 1997.

Dentro del ITAM, el doctor Rafael Morones ha participado en varios de los talleres ESGI. El primero de ellos en 1997, en la Universidad de Bath, con el problema *Diseño óptimo de un calefactor*; en 1998 en la Universidad de Southampton con el problema *Flujo de arcillas hinchables en grietas estrechas*; en 1999 en la Universidad de Edimburgo con el problema *Deformación de la superficie de un pez*; en 2000 en la Universidad de Sheffield con el problema *Identificación de parámetros globales para el comportamiento viscoelástico del músculo de un pez*; en 2001 en la Universidad de Keele con el problema *Transportes supersónicos libres de choque*; en 2002 en la Universidad de Lancaster con el problema *Pequeña y rápida emisión de tinta de una boquilla*; en 2004 en la Universidad de Oxford con el problema *Medida del contenido glucoso en el humor acuoso*; en 2006 en la Universidad de Bath con el problema *Deposición de cera en ductos de petróleo*; y en 2007 en la Universidad de Nottingham con el problema *Transporte de rocas de desecho incorporando los efectos de la rotación de la perforadora.*

Taller de Matemáticas en la Industria 2008

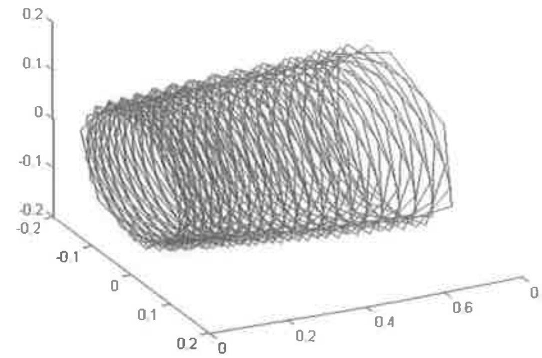
La semana del 11 al 15 de agosto se llevó a cabo la semana de Matemáticas en la Industria en el Instituto Tecnológico Autónomo de México. En esta ocasión el Dr. Andrew Lacey presentó cuatro problemas reales de diferentes industrias y se formaron equipos, una para cada uno de dichos problemas. A continuación una descripción de estos y la idea que siguió cada equipo para tratar de encontrar una solución.

Problema 1. Transporte de desechos de roca

Cuando se taladra un pozo petrolero, las partículas de piedra resultantes se transportan a la superficie a través de un flujo de un fluido viscoso no newtoniano. Los modelos actuales desprecian el efecto de la rotación del taladro. Se busca hacer un modelo que incluya estos efectos. El flujo de la región que rodea al taladro puede ser laminar o turbulenta. El túnel del pozo puede tener largas secciones que sean aproximadamente horizontales en las cuales se puede formar una cama de sedimentos. El taladro está girando y generalmente no está centrado por su peso y la influencia del flujo. La velocidad rotacional del taladro y la velocidad axial del fluido son comparables. Con la rotación podemos esperar que se forme una sedimentación.

Resultados

El equipo modeló el movimiento de una partícula dentro del fluido que rodea al taladro con ecuaciones diferenciales, tomando en cuenta el flujo rotacional y el flujo hacia la superficie del fluido viscoso. Se apoyaron con Matlab para hacer un modelo dinámico y varias pruebas para determinar la distancia que alcanza dicha partícula antes de convertirse en sedimento.



Problema 2. Presión del aire en el derrumbe de una mina

Cuando hay un derrumbe de roca en una excavación subterránea, la roca que cae generalmente desplaza una gran cantidad de aire y este aire desplazado puede resultar en un golpe de viento dentro de los túneles conexos y los ejes de las minas. Los golpes de viento son ocurrencias extremadamente perjudiciales que pueden causar daño al equipo para minería, a la infraestructura e incluso la muerte. Es posible que se generen velocidades del aire sumamente altas.

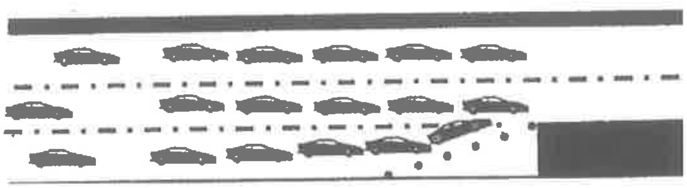
Resultados

Primero se modeló la roca que cae como un pistón sólido en caída libre, tratando de calcular la presión del aire que se generaría cuando éste estuviera a unos metros del piso. El segundo paso, fue considerar a la roca cayente como un pistón poroso, es decir, que el aire puede fluir a través de él. Este modelo considera que no sólo la presión del aire cambia, sino también lo hace el volumen del mismo. En este modelo, utilizando métodos de ecuaciones diferenciables, en particular un factor integrante, se llegó a una ecuación que no tiene solución analítica por lo que se intentó aproximar numéricamente. El tercer paso habría sido considerar los túneles interconectados dentro de la mina, sin embargo, el tiempo no fue suficiente.

Problema 3. Flujo del tránsito

Quizás el problema más sencillo de enunciar, sin embargo su respuesta no lo es. El objetivo es simplemente modelar el flujo del tránsito automotriz. Algunos de los comportamientos que se observan son:

- Ondas "stop-go" con densidad local más alta donde los vehículos se mueven lentamente y propagándose hacia atrás en el tráfico (efecto similar a gente esperando en colas).
- "Shocks" que se pueden desarrollar con vehículos que reducen drásticamente su velocidad al encontrarse con una fila de lento movimiento.
- El alto repentino en semáforos en luz roja y la gradual aceleración cuando se torna verde.
- ¿Pueden surgir estancamientos "fantasma"? Es decir, en los cuales no hay una razón evidente del porque suceden.



Resultados

En este problema se encontraron dos líneas principales de enfoque. Primero, se podía ver el tráfico como algo continuo y pensar que los automóviles se comportan como un fluido. La otra consiste en considerar un modelo discreto modelando coche por coche. Esta última manera de ver el problema complica considerablemente el modelo por lo que se optó por el modelo continuo. Sin embargo, y a pesar de la extensa literatura al respecto, se encontró que el problema es vasto y complejo llegando a requerir incluso ecuaciones diferenciales parciales para aproximar una solución. Se pudieron mostrar modelos simples para las ondas de tráfico en un semáforo, en un estancamiento o en un accidente, sin embargo, no fue posible encontrar un modelo para los estancamientos "fantasma".

Problema 4. Uso de la electricidad

En el Reino Unido, el cargo por uso de electricidad por todo el invierno depende fuertemente del consumo que se realice durante los tres períodos de media hora de mayor consumo eléctrico. Para ayudar a los clientes a reducir estos costos, grandes proveedores de electricidad pretenden predecir cuándo ocurrirán estos picos y previenen a los consumidores, quienes pueden reducir su consumo en estos períodos. No obstante, el mismo acto de prevenir a los consumidores reduce el consumo total y esto puede prevenir que dicho máximo ocurra. Cada proveedor de electricidad espera reducir el cargo para algunos de sus clientes emitiendo una advertencia en los días que parece posible que un pico ocurra posteriormente. Los clientes industriales generalmente reducen su consumo en esos días. Un proveedor está restringido a un número limitado de avisos. Un cliente que recibe un aviso puede o no tomarlo en cuenta. El objetivo es poder predecir, de manera confiable, con ligera ventaja cuándo serán los períodos de mayor consumo de energía

Resultados

Se tomaron en cuenta los avisos de los proveedores de electricidad acerca de cuál podría ser un pico. Basándose en éstos, se uso un modelo llamado el Problema de la Secretaria para poder escoger los avisos a los cuales hacerles caso. El problema surge de la necesidad de un directivo de escoger una secretaria teniendo que entrevistar a varias. La solución simplificada indica que se debe dejar pasar un número fijo de secretarias y luego escoger de las siguientes la que me ofrezca más que todas las anteriores. En el problema de la electricidad, se pueden asignar probabilidades a cada una de las advertencias del proveedor condicionadas a la cantidad de energía que se consumió en advertencias anteriores y después de cierto número de advertencias, escoger aquella que tenga una mayor probabilidad que todas las anteriores.

Conclusiones

A pesar de que los problemas presentados en este taller quizás exceden los conocimientos de matemáticas que se adquieren en una licenciatura y una semana es muy poco tiempo para conseguir una solución precisa para cada uno de ellos, estos problemas son una buena manera de emplear todo el conocimiento que ya tenemos y darnos una idea de cómo se puede aplicar todo lo que nos enseñan en problemas reales que surgen en la industria y conseguir una idea simplificada de lo que podría ser la solución de dichos problemas. También nos permitió convivir con personas de diversos semestres (de quinto en adelante) para conocer a los compañeros de toda la carrera y poder trabajar en equipo. Más aún, de este taller surgió la idea de modelar el flujo de los torniquetes recientemente instalados en todas las entradas del ITAM para encontrar la manera de que entorpezcan lo menor posible la entrada y salida de personas de nuestro instituto.

Los números también se pueden escuchar

Mariana Godínez Cuéllar
Estudiante de Ingeniería Industrial del ITAM

"A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas. The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas, like the colors or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is Me first tow lea is no permanent place in the world for ugly mathematics."
G.H. Hardy

Durante muchos siglos se ha considerado que las matemáticas y la música tienen cierta similitud y comúnmente se dice que tienen al menos cierta relación: la música necesita del orden y la matemática analiza ese orden; proporciones, simetrías, transformaciones, progresiones, módulos, logaritmos, series... ¡Toda la construcción armónica y parte de la melódica es matemática pura! También hay similitudes desde luego innegables, como lo mágico y lo abstracto de ambas; abstracción que las hace parecer pertenecer a otro mundo y, sin embargo, tienen tanto poder sobre este mundo: las matemáticas tienen múltiples aplicaciones y muchos no podríamos vivir sin la música.

Similarmente se puede encontrar en las mismas ciertas diferencias; diferencias que a su vez van de la mano y a final de cuentas terminan entretejiendo a la matemática y a la música. La música cambia su textura y carácter según el lugar y la época. Puede ser cristalina o densa, sentimental o explosiva. Por su parte, las matemáticas son directas, nunca alteran su carácter. La música se crea a partir de algo físico, instrumentos de todo tipo de materiales la producen. Las matemáticas son, sobre todo, abstracciones que, muchas veces, no necesitan ni siquiera papel y lápiz. La música está cargada de emociones, es alegre o triste, suave o agresiva, puede ser espiritual, estética, religiosa, no obstante, no podemos hablar de un teorema "triste" o de una demostración "agresiva".

Tanto el matemático como el músico se encuentran ocupados resolviendo problemas o componiendo o interpretando, sin detenerse a pensar que ambos están entregados a disciplinas que son paradigmas de lo abstracto.

La evolución de las matemáticas y la música a lo largo de la historia han marcado el tipo de relación existente entre ambas, sin embargo, no es posible hablar de la existencia de nexos entre las mismas si no hasta que aparecen los primeros signos de teorización tanto en la música como en la matemática.

Es en la Grecia antigua donde los principios unificadores, que constituyen el núcleo tanto de las matemáticas como de la música, alcanzan un grado suficiente de madurez como para que se establezcan las primeras relaciones. Ambos términos proceden respectivamente de los vocablos griegos musiké, "de las musas", y mathema, que significa "aquello que se aprende".

La concepción clásica de la música como un subconjunto de las matemáticas permaneció durante la Edad Media, y no fue sino hasta el siglo XII cuando se creó una nueva división de las ciencias, llamada escolástica divina, que no la incluía específicamente. Paralelamente, compositores y ejecutantes empezaron a separarse de la tradición pitagórica creando nuevos estilos y tipos de música. Por otra parte, la ejecución de obras más complejas llevó a experimentar con métodos de afinación alternativos que dieron lugar a una variación de la afinación pitagórica llamada afinación justa. En el nuevo método se seguían utilizando las matemáticas como herramienta para calcular los intervalos, pero olvidando los principios pitagóricos, con lo que se abandonaba el modelo de belleza clásico y la música se disociaba de los números. Este cambio de actitud causó desacuerdo entre los matemáticos, quienes querían una adherencia estricta a sus fórmulas, y los músicos, que buscaban reglas fáciles de aplicar.

El uso de las matemáticas para la formalización y el cálculo de ciertos aspectos de las composiciones fomenta la aparición y permanencia de dos tipos de situaciones entre matemáticas y música, ya consideradas como disciplinas. Por un lado, continuando en cierta forma con la tradición pitagórica, el músico establece en ocasiones un esquema matemático para la creación de sus composiciones sobrepasando el uso habitual dado a las matemáticas; por otro, el músico crea la obra de forma intuitiva, utilizando cánones estéticos, carentes aparentemente de componente formal, y es el matemático el que busca a posteriori un nexo entre la obra y las matemáticas. Un elemento matemático que ilustra muy bien los dos tipos de situación es la famosa sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... y en general, un término es la suma de los dos anteriores.

Relacionado con la sucesión de Fibonacci encontramos la sección o razón áurea. El cociente de dos términos sucesivos de esta sucesión tiende al número áureo: 1.618034 (también conocido como número de oro). La sección áurea es la división armónica de una recta en media y extrema razón; es decir, que el segmento menor es al segmento mayor como éste es a la totalidad de la recta.

AB : AC = AC : CB

sección áurea

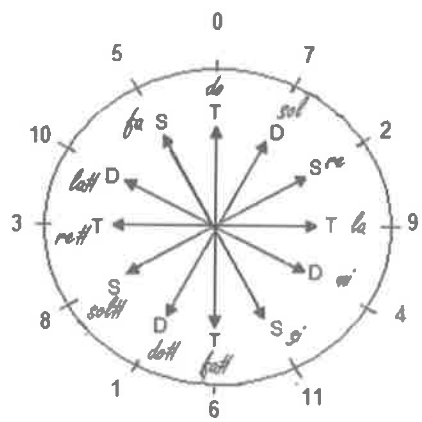
Siguiendo la lógica de la figura, si $AB = 1$ y $AC = x$ entonces $x^2 + x - 1 = 0$, luego $x = 0.618034$. Así, la parte mayor de cualquier longitud, dividida en razón áurea, es igual a la longitud total multiplicada por 0.618034. Esta proporción se puede encontrar ampliamente tanto en el arte como en estructuras naturales.

Un ejemplo muy ilustrativo del uso de la sucesión de Fibonacci y la razón áurea es el del compositor húngaro Bela Bartok, una de las figuras más originales y completas de la música del siglo XX.

El músico, alrededor de 1915, desarrolló un método para integrar todos los elementos de la música (escalas, estructuras de acordes con los motivos melódicos apropiados, proporciones de longitud, tanto de la obra en general como los de la exposición, desarrollo, reexposición, frases de conexión entre movimientos, etc.) basado en la razón áurea y su círculo de tonalidades, por un lado, y en la sucesión de Fibonacci, por otro.

El círculo tonal de Bartok es el siguiente: considérese el círculo de tonalidades vecinas o círculo de quintas (sucesión ascendente o descendente de notas musicales separadas por intervalos de quinta) dado de la siguiente forma: numérense las notas $do, do\#, re, re\#, mi, ...$, si del 0 al 11, respectivamente; luego, ordénense los números anteriores en una circunferencia saltando 7 lugares (como se muestra en la figura). Tómese do como la tónica T (altura musical más importante de una tonalidad) y asígnense las letras D, S y T sucesivamente a cada nota del círculo (siguiendo las manecillas del reloj): D designará a la dominante y S a la subdominante.

Así, cada nota tónica estará rodeada de su subdominante y su dominante; por ejemplo, $re\#$ será tónica con subdominante $sol\#$ y dominante $la\#$ y así sucesivamente. Si unimos, mediante ejes, los puntos T, D y S, obtendremos los llamados ejes de las tónicas, de las dominantes y de las subdominantes. En particular, existe una relación más adecuada entre los polos opuestos. Esta relación es el principio fundamental de la música de Bartok. Muchos ejemplos de su música siguen este principio.



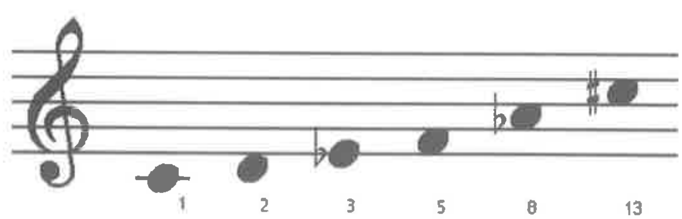
Círculo de Tonalidades de Bartok

En cuanto a la Forma y la Armonía, Bartok utiliza el principio de la razón áurea. Por ejemplo, en el primer movimiento de *Sonata para dos pianos y percusión*, que consta de 443 compases, si se multiplica este número por 0.618034 se obtiene el compás 274, el cual será el punto donde justamente se inicia la reexposición del tema principal de la sonata (la forma sonata está basada en dos temas musicales diferentes que se exponen, se desarrollan y se reexponen).

Representación gráfica del uso de la razón áurea en Sonata para dos pianos y percusión

Allegro Bárbaro es otra composición para piano solamente en la cual Bartok utiliza los números de Fibonacci 2, 3, 5, 8 y 13 en diversas ocasiones durante la pieza, a diferencia de la música tradicional, la cual utiliza 8 compases en casi todos los temas y múltiplos de 2 en los motivos y frases (los motivos forman frases, las frases temas, y esta secuencia de motivos, frases y temas constituye la base fundamental de la música clásica). También utiliza su círculo de tonalidades en la pieza y todo esto se logra a pesar de la duración de la misma, que es de tan solo 3 minutos.

Su uso de los acordes también está basado en los números de Fibonacci. Por ejemplo, en semitonos 2 es una segunda mayor, 3 es una tercera menor, 5 es una cuarta, 8 es una sexta menor y 13 es una octava aumentada (ver figura).



Acordes basados en la sucesión de Fibonacci

Lo anterior en particular para el compositor húngaro Bela Bartok; no obstante, también se conocen los casos de otros músicos que han utilizado la sucesión de Fibonacci y la razón áurea como patrón para determinar ciertos elementos de sus composiciones, tales como Wolfgang Amadeus Mozart, Johann Sebastian Bach, Ludwig van Beethoven y hasta una banda de rock progresivo contemporánea llamada Tool. Así, podemos observar como no sólo se quedan en lo abstracto estos elementos matemáticos; estos se presentan tanto en la naturaleza como en las artes, particularmente en la música.

Por la mezcla entre lo terrenal y lo celestial, lo esotérico y lo práctico, lo universal y lo particular, ambas disciplinas, la matemática y la música, han tenido un poder místico desde la Antigüedad. Todavía hoy el aspecto mágico y ritualista se mantiene: hay que tener cierto conocimiento para introducirse en la lectura de una partitura así como para poder seguir la demostración de un teorema. Pero en ambas hay algo maravilloso: la notación que es capaz de indicarnos tiempos, ritmos y altura de sonidos en el caso de la música, o una numeración tan sofisticada como la arábiga y notaciones tan desarrolladas que dan estructura y sentido a los conceptos más abstractos en el caso de las matemáticas.

Referencias:

- http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/profes/departam/mates/musica /index.htm
- http://www.sectormatematica.cl/musica/matematica %20en %20la %20musica.pdf
- http://www.uv.es/metode/anuario2004/65_ 2004.htm
- http://fhi-design.com/musica1.htm
- http://books.google.com.mx/books?id=NtPr5jPD7skC&pg=PA50 &lpg=PA50&dq=compas+274+de+sonata+para+dos+pianos+y+perc usion&source=web&ots=5kdxnkxVnY&sig=r0n0Mz_CRy2q0n4kJ5HERx8sFdU &hl=es&sa=X&oi=book_result&resnum=1&ct=result#PPA50,M1

Activa tus neuronas

Eligiendo corte

Cristóbal era un viajante de mucho cuidado. Cuando llegó a Piedra de Arriba vio que había dos peluquerías de caballeros. La primera estaba muy limpia, sin un pelo en el suelo y el peluquero tenía un corte de pelo magnífico. En la segunda se encontró todo lo contrario. El peluquero tenía la cabeza llena de trasquilones, y había pelos por todos sitios. A pesar de ser muy escrupuloso, Cristóbal decidió cortarse el pelo en esta peluquería.
¿Por qué tomaría esa decisión Cristóbal?

Dos menos dos?

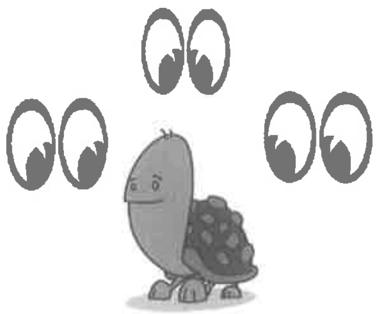
¿Cuántos animales tengo en mi corral, si todos son perros, menos dos; todos son gatos, menos dos, y todos son caballos, menos dos?

¿Qué? ¿Lo has descubierto ya?

¿No? Bueno, pues ahí va una pista:
Son muchos menos de los que piensas...

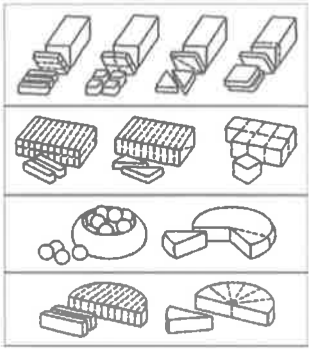
Zoológico

Ana y José Luis fueron al Zoológico. Curiosamente en una de las zonas estaban mezclados los patos con las tortugas. Al salir del Zoológico, Ana le dijo a José Luis:
-Oye, José Luis, ¿te has fijado en los patos y en las tortugas que había?
-Pues no. ¿Cuántos había?
-Averígualo tú mismo. En total había 56 ojos y 80 patas (de las de andar, no hembras de pato).
Por si no se te ocurre nada, te podemos decir que José Luis encontró la solución al darse cuenta que cada animal tiene dos ojos.



Cortando queso

En Diezma tenemos una fábrica de quesos. A alguien se le ocurrió comprar varios para partirlos y envasarlos en aceite. Partirlos por la mitad era muy fácil.También era muy fácil cortarlos en cuatro trozos iguales con dos cortes rectos. Le pedí a mi hija que partiera uno en ocho trozos iguales y me dijo:
-Papá, es muy fácil, sólo tienes que dar cuatro cortes así.
De pronto, mientras hacía los cortes se dio cuenta de que podían conseguirse los ocho trozos iguales con tres cortes.
¿Cómo lo harías tú?

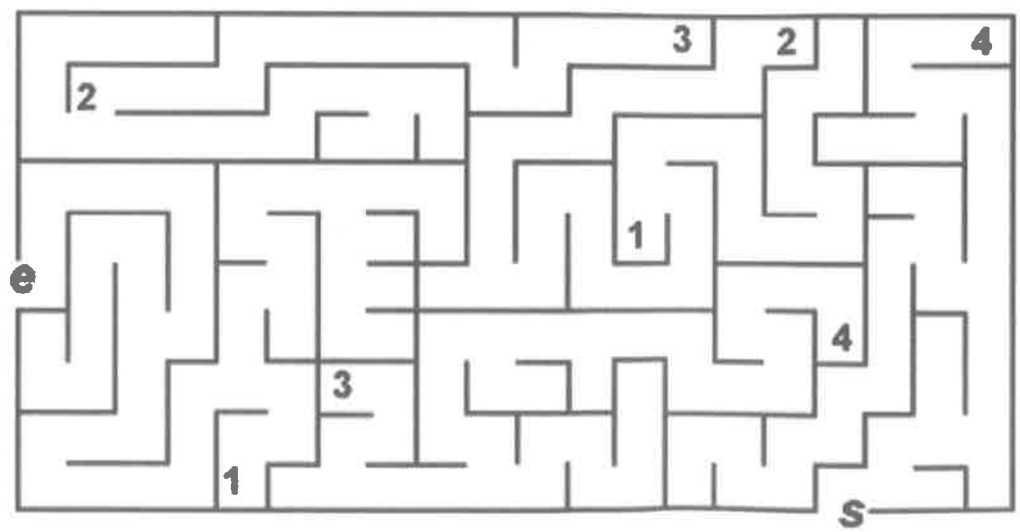


Rollos y rollos

Antonio tiene tres rollos de cuerda de 70, 98 y 126 metros cada uno. Desea cortar el mayor número posible de pedazos iguales de cuerda lo más grande que se pueda y sin desperdiciar nada. ¿De qué tamaño deberá cortar los trozos y cuántos trozos saldrían de cada rollo?

Un poco de laberintos

Hay que entrar por donde está la letra *e* y salir por la letra *s*, pero hay que hacerlo con ciertas restricciones. De la letra *e* hay que llegar hasta el número 1. Aunque en el laberinto hay dos números 1, desde la *e* sólo se puede llegar a uno de ellos; el truco consiste en averiguar a cuál. Se busca el otro número 1 y de ahí se parte hacia el número 2. Entre el primer número 1 y el segundo no es necesario trazar ninguna línea. Una vez que se llegó al número 2, se busca el otro número 2 y de ahí se parte hacía el número 3, y así sucesivamente hasta la salida *s*.

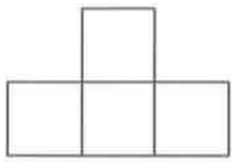


Zona Olímpica

1. Se consideran las funciones reales de variable real $f(x)$ de la forma $f(x) = ax + b$, siendo a y b números reales. ¿Para qué valores de a y b se verifica $f^{2008}(x) = x$ para todo número real x?

   Nota: Se define $f^2(x) = f(f(x))$, y en general $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$.

2. Determina los valores de n para los cuales el cuadrado de n x n se puede cubrir con figuras de la forma:



3. Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, \ldots, n$ (tiene muchas monedas de cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

   - En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.
   - Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.
   - Para cualesquiera dos cajas sucede que entre las dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.
   - No existe una denominación tal que todas las cajas tengan una moneda de esa denominación.

   ¿Para qué valores de n puede el coleccionista hacer lo que se propone?

4. Se tiene un tablero de n x n pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo (es decir, los cuadritos del rectángulo que eran negros se convierten en blancos y los que eran blancos, se convierten en negros). Encuentra para qué n es posible lograr que

todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario. Nota: las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir cambiando.

5. Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestre que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2 x 1 (sin que estos se traslapen), entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

6. Un número es suertudo si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo, ya que $1900 \mapsto 82 \mapsto 68 \mapsto 100 \mapsto 1$. Encuentre una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.

7. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos pueden ser un cuadrado perfecto, por ejemplo $3^2 + 4^2 = 5^2$.
   - Pruebe que la suma de los cuadrados de m enteros consecutivos no puede ser un cuadrado para $m = 3$ y $m = 6$.
   - Encuentre un ejemplo de 11 números positivos consecutivos cuya suma de cuadrados sea un cuadrado perfecto.

8. Considere las 27 fichas de dominó que quedan quitando la blanca-blanca. Tomando en cuenta los puntos que hay en una ficha, a cada ficha le corresponde un número racional menor o igual que uno. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

9. Un rectángulo de lados enteros m, n está dividido en cuadrados de lado 1. Un rayo de luz entra al rectángulo por uno de los vértices, en la dirección de la bisectriz del ángulo recto, y es reflejado sucesivamente en los lados del rectángulo. Encuentre el número de cuadrados, en función de m y n, que son atravesados por el rayo de luz.

10. Si en un triángulo de vértices A, B, C con lados a, b y c, se tiene que el ángulo de A es el doble del ángulo de B. Pruebe que $a^2 = b(b + c)$.

Solución a la pregunta de Erdös

Diego Paez
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

En el número anterior se publicó el siguiente problema:

En el patio de una escuela hay un cuadrado pintado en el suelo cuyos lados tienen longitud a y en cada una de las esquinas hay una hormiga. Al mismo tiempo y a la misma velocidad, cada hormiga empieza a caminar a la dirección en la que se encuentra la hormiga de la derecha. Eventualmente las hormigas llegan al centro del cuadrado al mismo tiempo. ¿Qué camino siguieron las hormigas y cuál es la distancia que recorrieron? ¿Cuál es la distancia recorrida por cada hormiga si en lugar de un cuadrado tenemos un pentágono regular con lados de longitud 1?

Es más interesante resolver el problema que leer la solución, por lo que mi recomendación a cualquier persona que lea esto es que intente hallar la solución por sí misma (si es que aún no lo ha resuelto) y comparar con lo que he escrito abajo, si cree conveniente.

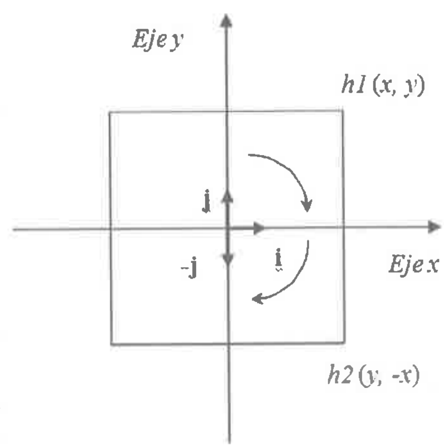
Cuadrado

Para resolver el problema, creo que lo más simple es colocar el origen en el centro del cuadrado (puesto que cada hormiga equidista del centro, y es al centro a donde todas llegan eventualmente). Utilizaremos coordenadas rectangulares.

Una vez hecho esto las cosas se simplifican, si suponemos una hormiga cualquiera, que para simplificar la llamaré $h1$, en (x, y), entonces la siguiente, que la llamaré $h2$, se encuentra, siguiendo ***el sentido de las manecillas del reloj***, en $(y, -x)$, por lo siguiente:

Si pensamos en rotar los ejes a 90^o **en el sentido de las manecillas del reloj**, el vector $\boldsymbol{i}$, donde $\boldsymbol{i}= (1, 0)$, pasa a ser el vector $-\boldsymbol{j}$, donde $\boldsymbol{j}= (0, 1)$, y el vector $\boldsymbol{j}$ pasa a ser el vector $\boldsymbol{i}$ (ver figura), de tal manera que:

$$(x, y) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j} \text{ "pasa a ser" } \\ -x\boldsymbol{j}+ y\boldsymbol{i}= (y, -x)$$



Saber en donde se encuentra h_2, es necesario para saber qué dirección y sentido toma h_1 puesto que h_1 va a seguir a h_2, la dirección nos la da el vector que parte de h_1 hacia h_2, es decir:

$$h_2 - h_1 = (y, -x) - (x, y) = (y - x, -x - y)$$

Como ya tenemos el vector, que entre otras cosas contiene la dirección y el sentido necesarios, y la derivada representa la pendiente de la recta tangente a una curva (es decir representa una dirección), podríamos igualar de la siguiente manera: $m = \frac{dy}{dx} = \frac{(-x-y)}{(-x+y)}$. Pero hay un problema con esta asignación, las ecuaciones de las curvas que obtengamos de la anterior igualdad son funciones de x, y si las hormigas se movieran en espiral (como de hecho lo hacen), su trayectoria no quedaría correctamente descrita. Por lo que es mejor parametrizar, obteniendo:

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + y(t) \qquad \frac{dy}{dx} = -x(t) - y(t)$$

Para resolver este par de ecuaciones diferenciales sean:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, Y'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

Entonces la solución al sistema $Y'(t) = P \cdot Y(t)$, si $K = \begin{bmatrix} c \\ k \end{bmatrix}$ donde c y k son constantes, está dada por:

$$Y(t) = e^{tP} \cdot K = \begin{bmatrix} e^{-t}(c\cos(t) + ksen(t)) \\ e^{-t}(k\cos(t) - c\,\mathrm{sen}(t)) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{-t}(c\cos(t) + k\,\mathrm{sen}(t)) \qquad \text{(solución para las ecuaciones diferenciales)}$$

$$\mathrm{y(t)= e}^{-t}(k\cos(t) - c\,\mathrm{sen}(t))$$

Donde c y k son constantes.

Finalmente, para obtener las ecuaciones que describen el movimiento de una hormiga en específico, es suficiente dar las condiciones iniciales de dicha hormiga, por ejemplo para la que se encuentra en la esquina superior derecha éstas podrían ser (si suponemos que parte de $t = 0$) $x(0) = \frac{a}{2}$, $y(0) = \frac{a}{2}$ (puesto que el cuadrado mide a unidades y el origen está colocado en el centro del cuadrado), de donde se encuentran las constantes c y k. Así, por ejemplo, sustituyendo en $t = 0$:

$$x(0) = \frac{a}{2} = e^0(c\cos(0) + k\,\mathrm{sen}(0)) \Longleftrightarrow c = \frac{a}{2}$$

Similarmente se halla $k = \frac{a}{2}$, y por lo tanto, las ecuaciones son:

$$x(t) = \frac{ae^{-t}}{2}(\cos(t) + \mathrm{sen}(t)) \qquad y(t) = \frac{ae^{-t}}{2}(\cos(t) - \mathrm{sen}(t))$$

Esta es la solución para la ecuación de la curva que describe el movimiento de la hormiga en la esquina superior derecha

Para hallar la distancia que recorre cualquiera de las hormigas, basta encontrar la longitud de la curva en $t \in [0, \infty)$ (¡al parecer las hormigas no llegan tan eventualmente al centro del cuadrado ya que necesitan de un tiempo infinito para encontrarse!), para ello son necesarias las derivadas:

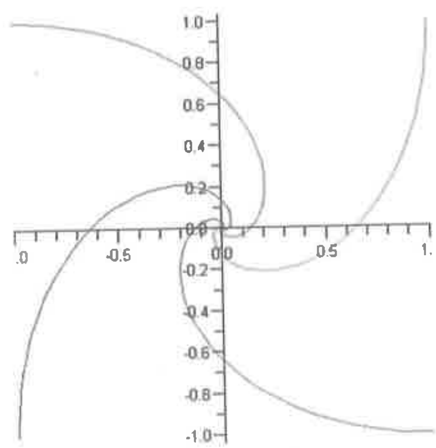
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ae^{-t}}{2}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) + \frac{ae^{-t}}{2}(-\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) = -ae^{-t}\operatorname{sen}(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{ae^{-t}}{2}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)) + \frac{ae^{-t}}{2}(-\operatorname{sen}(t) - \cos(t)) = -ae^{-t}\cos(t)$$

Entonces la **longitud de la curva** es :

$$\int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^\infty \sqrt{(-ae^{-t}\operatorname{sen}(t))^2 + (-ae^{-t}\cos(t))^2}dt$$

$$= \text{a}\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{(\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t))}dt = a\int_0^\infty e^{-t} = a$$



Gráfica para $t \in [0, \infty)$

Pentágono

El caso del pentágono, se reduce a lo mismo; elegir el origen de un sistema de coordenadas en el centro del pentágono, hallar la rotación para (x, y), obtener las ecuaciones diferenciales, resolverlas, sustituir condiciones iniciales en las ecuaciones para encontrar las constantes y hallar la longitud de curva. De la rotación se obtiene que una segunda hormiga estaría en $\left(x\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + y\operatorname{sen}\left(\frac{2}{5}\pi\right), -x\operatorname{sen}\left(\frac{2}{5}\pi\right) + y\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right)$ y por lo tanto las ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + x(t)\cos(\frac{2}{5}\pi) + y(t)\operatorname{sen}(\frac{2}{5}\pi)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) - x(t)\operatorname{sen}(\frac{2}{5}\pi) + y(t)\cos(\frac{2}{5}\pi)$$

Resolviendo las ecuaciones y, por ejemplo, dando como valores iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = \dfrac{a}{2\operatorname{sen}(\frac{1}{5}\pi)}$, que es la posición de la hormiga superior (a es la longitud del lado), se obtiene (aproximadamente):

$$x(t) \approx \frac{ae^{-0.69098t}}{2\operatorname{sen}(\frac{1}{5}\pi)}(\operatorname{sen}(0.95106t)$$

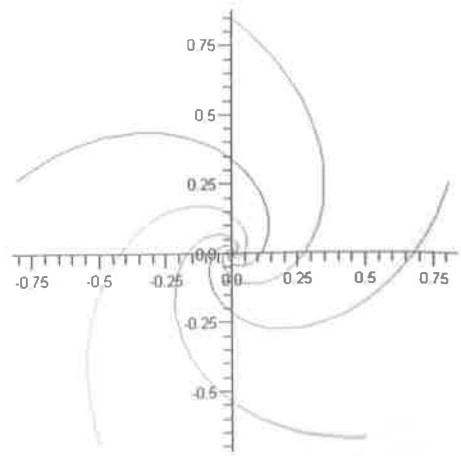
$$y(t) \approx \frac{0.26e^{-0.69t}}{2\operatorname{sen}(\frac{1}{5}\pi)}[1.23\operatorname{sen}(0.95t)+3.80\cos(0.95t)-2\operatorname{sen}(1.25+0.95t)-2\operatorname{sen}(-1.25+0.95t)]$$

La longitud de la curva sería entonces:

$$l \approx 1.4472135959a$$

Y por lo tanto si tuviera longitud 1 sería:

$$l_1 \approx 1.4472135959$$

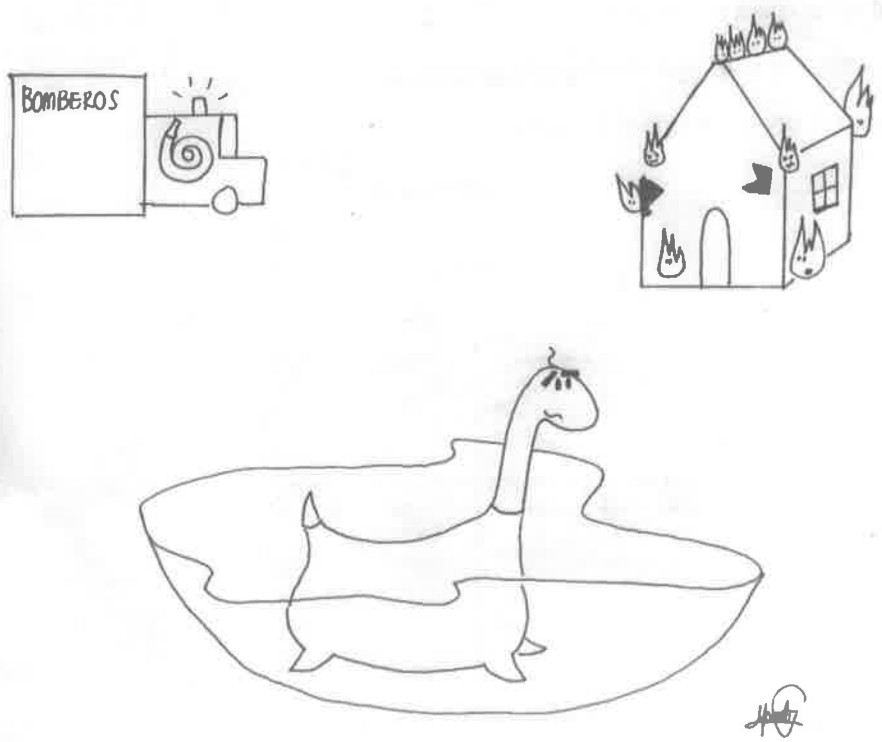


Gráfica para $t \in [0, \infty)$

Pregunta de Erdös número 2

Como se mencionó en el número anterior, la mejor respuesta será publicada en el siguiente número.

En el pueblo de Ness, una de las cabañas se está incendiando y los bomberos acaban de ser informados, pero lamentablemente el camión de bomberos tiene que hacer una parada en el lago para reabastecerse de agua y así poder apagar el fuego. ¿Puedes encontrar la ruta que deben de seguir los bomberos para pasar por el lago y llegar al incendio lo más rápido posible? La forma del lago es una circunferencia. Formúlalo en términos de la posición de la estación de bomberos y de la cabaña.



Inteligencias Múltiples

Rebeca Farrugia Fuentes
Estudiante de Actuaría del ITAM

Howard Gardner, psicólogo estadounidense y profesor de la Universidad de Harvard, desarrolló la teoría de las *inteligencias múltiples* en su libro *Multiple Intelligences*, publicado en el año 1983. En este libro plantea que la inteligencia no es algo unitario, sino un conjunto de inteligencias. Esta teoría es la culminación del respeto a la individualidad y a la diversidad del ser humano.

Gardner definió el termino "inteligencia" a partir de los siguientes criterios:

- Capacidad de resolver problemas reales.
- Capacidad de crear productos efectivos.
- Capacidad de encontrar o crear problemas

A partir de estos, el autor definió ocho inteligencias, considerando que pueden existir más. Nos hace saber que las ocho inteligencias están en todos los seres humanos, pero que cada persona las desarrolla de manera diferente. A continuación está la lista de las ocho inteligencias definidas por este psicólogo, describiendo algunas de sus formas de aprendizaje y sus talentos:

- *Verbal-lingüística*: La gente verbal-lingüística es buena para la conversación, el relato y los juegos de palabras. Poseen un buen vocabulario y tienen excelente ortografía. Aprenden por medio de lecturas, pláticas, escritos y discusiones. Piensan con palabras.
- *Visual-espacial*: Las personas visual-espaciales pueden ser grandes artistas, cuidan los detalles, los espacios y los colores. Pueden visualizar soluciones de problemas. Les gusta la pintura y la escultura. Aprenden y piensan con imágenes.
- *Lógica-matemática*: Los individuos lógico matemáticos se divierten con juegos de secuencias, lógica y números. Disfrutan del análisis. Poseen un pensamiento abstracto. Aprenden utilizando la lógica y los números.
- *Kinestésica*: La gente kinestésica es buena para reproducir movimientos exactos, combinan el cuerpo y la mente, tienen excelente coordinación y usan lenguaje corporal para comunicarse. Les gustan los deportes, la danza y la actuación. Aprenden haciendo, es decir, estando en movimiento.
- *Musical*: Las personas musicales tienden a expresarse por medio de la música. Disfrutan escucharla, de bailarla y de tocar algún instrumento. Tienen la facilidad de distinguir diferentes tonos y sonidos. Aprenden a través del ritmo y de la música.

- *Intrapersonal*: Los individuos intrapersonales suelen ser autosuficientes. Son conscientes de sus sentimientos, valores, ideas y creencias. Disfrutan estar solos. Aprenden cuando tienen tiempo para formular y expresar sus pensamientos, así como para recapacitar y procesar la información que reciben.
- *Interpersonal*: La personas interpersonales disfrutan de la compañía de la gente. Son buenos amigos, empáticos y grandes líderes. Saben organizar, guiar y resolver problemas. Aprenden con la compañía de otras personas.
- *Naturalista*: La gente naturalista conoce bien los fenómenos y procesos de la naturaleza. Distinguen perfectamente los animales, peces, rocas, plantas, flores, estrellas, etc. Son grandes observadores. Les gusta la jardinería y el cuidado de los animales. Aprenden ordenando, clasificando y observando.

A lo largo de los años, uno va conociéndose a sí mismo y descubre qué es lo que le gusta y lo que se le facilita, así como lo que no le gusta. Aún así, no es fácil reconocerse dentro de estas inteligencias. Es por esto que a continuación se encuentra un cuestionario para que te sea sencillo reconocerte tus inteligencias y utilizar los métodos de aprendizaje adecuados a tu perfil.

Test de Inteligencias Múltiples

Escribe un número del 1 al 5 que se refiera a qué tanto te identificas con los siguientes enunciados, siendo 1 si no te identificas y 5 si te identificas totalmente (puedes repetir los números). Al final suma los resultados de cada inteligencia y la que tenga el número más grande es la que predomina en tu perfil.

Verbal-lingüística

Los libros son importantes para mí.	
Escucho las palabras en mi cabeza antes de leerlas, escribirlas o decirlas.	
Prefiero escuchar radio que ver televisión o películas.	
Me gustan los juegos de palabras como crucigramas y adivinanzas.	
Disfruto entretener a otros con trabalenguas y rimas.	
A veces me piden que explique el significado de una palabra que utilicé al hablar.	
Las materias fáciles para mi fueron español, historia y educación cívica.	
Si voy manejando en carretera, me fijo más en los letreros que en el paisaje.	
Mi conversación alude con frecuencia a cosas que he leído.	
Recientemente escribí algo que me enorgulleció o que fue reconocido por otros.	

Visual-espacial

Suelo ver imágenes nítidas con los ojos cerrados.	
Soy sensible al color.	
Trato de fotografiar o grabar todo lo que puedo.	
Me gusta resolver rompecabezas y laberintos.	
Tengo sueños vívidos.	
Puedo ubicarme en un lugar desconocido.	
Me gusta hacer garabatos o dibujar.	
Siempre se me hizo más fácil la geometría que el álgebra.	
No me cuesta trabajo imaginarme como se ven las cosas desde otro punto de vista.	
Prefiero los libros con muchas imágenes.	

Lógica-matemática

Me es fácil hacer cálculos mentalmente.	
Las matemáticas y las ciencias fueron mis materias preferidas.	
Me gustan los juegos que requieren pensamiento lógico.	
Me gusta pensar en qué ocurriría si se hace algún cambio.	
Suelo buscar patrones o secuencias lógicas en las cosas.	
Me causan interés los adelantos científicos.	
Creo que hay una explicación razonable para casi todo.	
A veces mi pensamiento surge en forma de conceptos claros sin palabras ni imágenes.	
Me gusta encontrar fallas de lógica en lo que la gente dice y hace.	
Me siento más a gusto cuando algo ha sido medido, analizado o cuantificado de alguna manera.	

Kinestésica

Suelo participar en algún deporte o actividad física.	
No puedo estar quieto por mucho tiempo.	
Me gusta trabajar con las manos. (Tejer, coser, armar modelos, etc.)	
Mis mejores ideas surgen cuando estoy llevando a cabo una actividad física.	
Me gusta pasar tiempo de recreación al aire libre.	
Al platicar uso mucho las manos o el lenguaje corporal.	
Necesito tocar las cosas para aprender sobre ellas.	
Me gustan los deportes extremos o los juegos mecánicos aventurados.	
Tengo buena coordinación física.	
Prefiero practicar algo nuevo a leer o ver cómo se hace.	

Musical

Canto bien.	
Me doy cuenta cuando una nota está desentonada.	
Escucho música casi todo el tiempo.	
Toco al menos un instrumento musical.	
Mi vida sería muy triste si no hubiera música.	
Cuando voy caminando, me sorprendo tatareando o entonando alguna canción.	
Me es fácil llevar el compás de una canción con un instrumento simple de percusión.	
Conozco la melodía de muchas canciones.	
Si escucho una canción pocas veces puedo interpretarla muy bien.	
Suelo tamborilear o cantar mientras estudio o trabajo.	

Intrapersonal

Suelo pasar tiempo solo meditando o reflexionando sobre la vida.	
He tomado cursos de desarrollo personal.	
Puedo responder a los obstáculos con flexibilidad.	
Tengo un pasatiempo o un interés que no comparto con nadie.	
Pienso regularmente es las metas importantes de mi vida.	
Conozco bien mis habilidades y mis dificultades.	
Prefiero pasar el fin de semana solo, en un lugar pacífico, que en un lugar con mucha gente a mi alrededor.	
Me considero una persona independiente o resuelta.	
Escribo regularmente un diario para registrar los acontecimientos de mi vida.	
Trabajo por mi cuenta o me interesa iniciar mi propia empresa.	

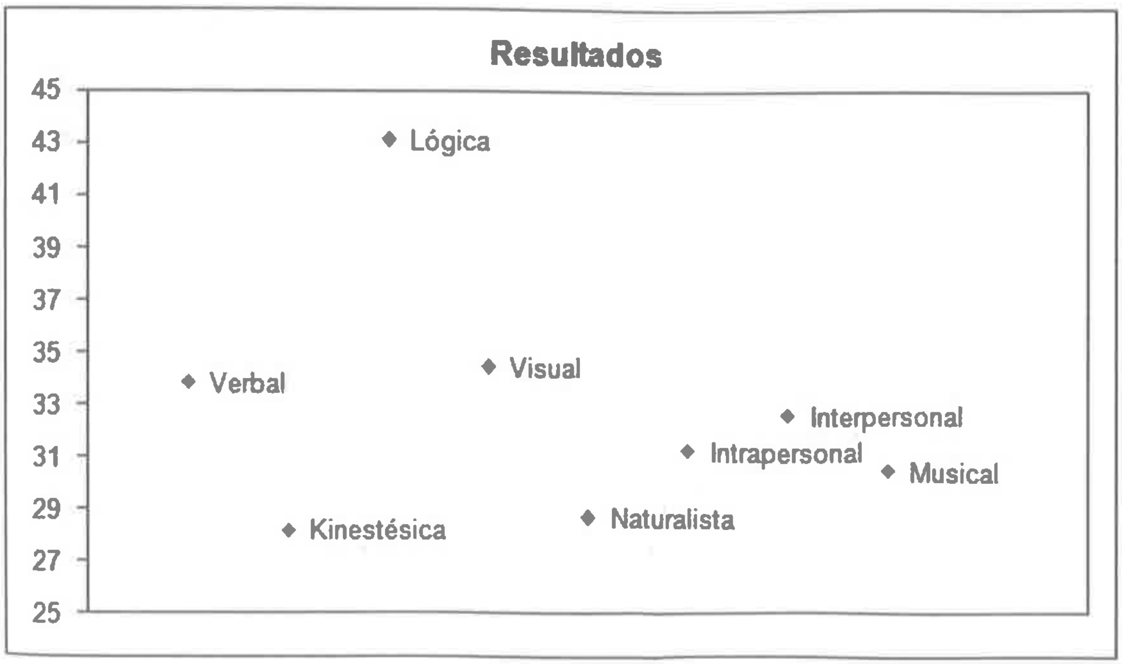
Interpersonal

La gente me busca para que de mi consejo.	
Prefiero los deportes que se llevan acabo en equipo.	
Si tengo un problema, busco a alguien que me pueda apoyar en vez de resolver el problema por mi cuenta.	
Tengo por lo menos tres muy buenos amigos.	
Prefiero los pasatiempos sociales, como jugar póker o dominó a actividades individuales, como los videojuegos.	
Me gusta enseñarles a otras personas lo que soy capaz de hacer.	
Me considero líder (u otros me han dicho que lo soy).	
Me siento bien entre mucha gente.	
Me gusta participar en actividades sociales relacionadas con mi trabajo, iglesia o comunidad.	
Prefiero ir de fiesta en las noches a quedarme solo en casa.	

Naturalista

Disfruto realizar experimentos para entender los fenómenos naturales.	
Cuando estoy rodeado de árboles, me gusta clasificarlos por familias, por forma de las hojas, por altura, etc.	
Me gusta ver el cielo en las noches y así poder identificar tipos de cuerpos celestes, constelaciones, etc.	
Me es fácil predecir el clima.	
Aprovecho las oportunidades para observar animales o plantas e interactuar con ellos o cuidarlos.	
Si tengo la oportunidad de usar un microscopio, unos binoculares o un telescopio los aprovecho para estudiar organismos y sistemas.	
Si voy en la carretera pongo más atención en el paisaje que en los letreros de la carretera.	
Organizo mis cosas de acuerdo a patrones y categorías.	
Puedo recordar detalladamente el paisaje, los árboles y la vegetación de los lugares que he visitado.	
Mis vacaciones ideales son en una cabaña en el bosque.	

Se realizó esta encuesta a 20 profesores del departamento de Matemáticas y Estadística del ITAM, como era de esperarse la inteligencia predominante fue la Lógica. La siguiente gráfica muestra los promedios por tipo de inteligencia.



BORGES Y LA MATEMÁTICA

Dr. Oswaldo González-Gaxiola
Coordinador de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Depto. de Matemáticas Aplicadas y Sistemas UAM-Cuajimalpa

Aunque normalmente no tendemos a relacionar Literatura y Matemáticas, en las obras del escritor argentino Jorge Luis Borges hay un marcado interés por ciertos conceptos filosóficos y matemáticos. Borges se sintió fascinado por el "inmediato e inaccesible encanto de las matemáticas, que apenas un simple hombre de letras puede entender o imagina entender". Lo que centrará nuestro interés serán algunas ideas matemáticas que son la base de su pensamiento sobre el infinito, el laberinto, el tiempo y la realidad. Por otra parte, el estilo de Borges está dirigido por una arquitectura estructural muy bien pensada y un desarrollo lógico, empleando una economía de recursos certeramente planeada: nada falta, pero tampoco nada sobra en ellos.

La matemática ha sido el centro de algunas producciones literarias y filosóficas famosas: algunos de los diálogos de vejez de Platón, como Teeteto y Timeo, colocan la matemática en el centro de la atención, y más recientemente podríamos citar a autores matemáticos tan dispares como Pascal o Lewis Carrol o a nuestro contemporáneo que es escritor y matemático, Apostolos Doxiadis. Borges ha sido un buen modelo en el arte de conjugar el conocimiento matemático con el interés narrativo y expresivo. Recordando las palabras de un matemático de este siglo: "La matemática es bella en sí misma, un monumento mucho más perenne que el bronce e incluso, como la mejor música, mucho más universal que las producciones literarias, aunque su belleza, -tan sólo asequible a los ojos del alma-, en frase de Platón, no se alcanza sin cierto esfuerzo que nos la haga connatural y familiar. La matemática es una aventura del espíritu que ha producido objetos mentales que no pierden con los siglos nada de su esplendor y grandeza. La matemática es, como lo proclamaron ya los pitagóricos de hace más de 25 siglos, la herramienta adecuada para acercarnos a las raíces y fuentes de la naturaleza eterna".

Al parecer Borges comprendía algunos conceptos matemáticos y para apuntalar ciertos efectos narrativos, se valía de ideas que perturban el tosco sentido común. "Me interesa la obra de Bertrand Russell y lo que he podido leer del matemático alemán Georg Cantor. He leído muchos libros con total incredulidad sobre la cuarta dimensión. Pero no me veo como matemático, porque no tengo ninguna facultad para ello". Borges conocía los rudimentos de la teoría de conjuntos de los escritos de Cantor, esto se deja ver en *La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga*, de **Discusión (1932)**, y en *La doctrina de los ciclos* de **Historia de la eternidad (1936)**. No cabe duda que Borges admiraba y respetaba el infinito, "palabra de zozobra que hemos engendrado con temeridad y que una vez consentida en un pensamiento, estalla y lo mata". *El libro de arena* de **El libro de arena (1975)**, es un relato que podría servir para analizar más de cerca las ideas y conceptos matemáticos involucrados en una prosa no de ficción sino fantástica, en este cuento la pluma de Borges nos dice que la propiedad arquimediana se encarna en "un objeto de pesadilla, una cosa obsena que infamaba y corrompía la realidad".

Nuestro escritor, en su fabulosos cuentos *Tlön, Uqbar, Orbis Tertius* de **Ficciones (1944)** y *Tigres azules* de **La memoria de Shakespeare (1983)**, nos narra de una manera exquisita que el sencillo procedimiento de contar sufre un trastocamiento esencial, del que se derivaria una aritmética distinta, deforme, impredecible. Tanto las leyes de la aritmética de la inasible Uqbar como las piedras color tigre-de-los-sueños atentan de una manera surrealista contra las leyes de la aritmética de nuestra matemática.

Este recorrido matemático por algunos de los temas borgesianos ha de llevarnos necesariamente a la conclusión de que la combinatoria ejercía en el escritor argentino una seducción desenfrenada; pues en *La biblioteca de Babel* y *La lotería de Babilonia* de **Ficciones (1944)** esta rama de la matemática forma parte esencial del argumento y en los laberintos concretos que Borges describe (casas, palacios, ciudades...) dan pie a comparaciones y alusiones filosóficas-matemáticas o literarias concepciones de Nicolás de Cusa o de Pascal, aplazamientos, aporías eleáticas, tiempo cíclico o bifurcado. Para Borges, el infinito era "un concepto corruptor y desatinador más universal y temible que el concepto del mal", **Otras inquisiciones (1952)**; pero, al mismo tiempo se sentía tan atraído por él que alguna vez planeó escribir su historia en un volumen que habría sido como el paralelo de **Historia de la eternidad (1936)** y en una de las tantas entrevistas que concedió expresó "sospecho que la palabra infinito fue alguna vez una insípida equivalencia de inacabado, ahora es una de las perfecciones de Dios en la teología y una eterna discusión en la metafísica, un énfasis popuralizado en las letras y una finísima concepción renovada en las matemática".

Muchos critican el intelectualismo de Borges que califican de excesivo, dicen además que como escritor rige sus relatos con rigor matemático, pero Borges sabía que toda realidad se disuelve con la presencia del infinito y lo evoca constantemente en sus obras, a veces eludiéndolo en una palabra, otras desarrollándolo en un complejo argumento; él concebía al infinito como un camino sin fin (lineal, cíclico o laberíntico), como la inmovilización en un gesto etc. Afortunadamente sí podemos decir que existe una conexión sólida, indudablemente, entre Borges y la matemáticas. Borges estudió matemáticas durante varios años, principalmente a través de la visión logicista de Bertrand Russell. Conoció las arenas movedizas de las paradojas lógicas, los infinitos matemáticos y las discusiones sobre lenguajes formales que transformaría con el tiempo en piezas literarias. Hay una cantidad realmente asombrosa de rastros matemáticos, e incluso pequeñas lecciones sofisticadas a través de su obra, desde *El idioma analítico de John Wilkins* en **Otras inquisiciones** hasta *Examen de la obra de Herbert Quain* de **Ficciones**, desde *La biblioteca de Babel* y *La lotería de Babilonia* también de **Ficciones** hasta *La esfera de Pascal* de **Otras inquisiciones** y *Avatares de la tortuga* de **Discusión** podemos encontrar esa manera tan exactamente sutil de narrar.

Para Borges existen muchísimos Aleph ($\aleph$), y la posibilidad de ser partícipes de este fenómeno metafísico, esto es, de ser observadores de un punto mínimo temporo-espacial de gravedad invisible, en donde convergen todas, absolutamente todas las cosas y que es capaz de mostrarnos la realidad inacabable del cosmos, de manera de sentirnos como un ojo divino al cual nada puede escapársele porque todo lo domina, corresponde a una antigua tesis filosófico-matemática. Aleph es la primera letra del alfabeto sagrado y es, al mismo tiempo, el símbolo del lugar en donde Dios (para el creyente) se encuentra, es decir, el sitio de la sabiduría absoluta. Borges utilizó esto como argumento de su cuento *El Aleph* de **El Aleph (1949)**, dicho cuento terminó por transformarse en un magnífico suceso narrativo alrededor de los años en que fue editado. Desde la Revolución Industrial y antes, se ha puesto la ciencia al servicio de la humanidad; este es el papel que ha asumido la tecnología. En los años de la edición de *El Aleph*, los medios de comunicación correspondían a un fenómeno que asombraba al mundo por su capacidad de mediatez. En este sentido, quizá un igualmente asombrado Borges, como observador sensible de dicho fenómeno y adornando la tesis filosófica del *Aleph* con la ayuda de la narrativa, postuló que un *Aleph* cualquiera, siendo un poco observadores, podría interpretarse como una metáfora de lo que significaría en posteriores años la idea de "aldea glo-bal". Aún así, este complejo escritor no vivió lo suficiente como para conocer una de las creaciones más asombrosas concebidas por la humanidad con la ayuda, por qué no decirlo, de las matemáticas: Internet.

Como podemos ver en este brevísimo artículo, en la literatura creada por Borges se percibe la fértil convivencia de matemáticas y letras que ese ciego visionario hizo posible para deleite de nosotros sus lectores.

Referencias

[1]J. L. Borges, *Discusión*, Editorial EMECÉ; 1932.

[2]J. L. Borges, *El Aleph*, Alianza Editorial; 1949.

[3]J. L. Borges, *El libro de arena*, Editores Plaza y Janés 1975.

[4]J. L. Borges, *Ficciones*, Alianza Editorial; 1944.

[5]J. L. Borges, *Historia de la eternidad*, Alianza Emecé; 1936.

[6]J. L. Borges, *La memoria de Shakespeare*, Alianza Editorial; 1983.

[7]J. L. Borges, *Otras inquisiciones*, Editorial EMECÉ; 1952.

[8]Orlando Barone, *Diálogos Borges-Sabato*, Editorial EMECÉ; 1976.

[9] Platón, *Diálogos, Editorial Porrúa*; Colección Sepan Cuantos.

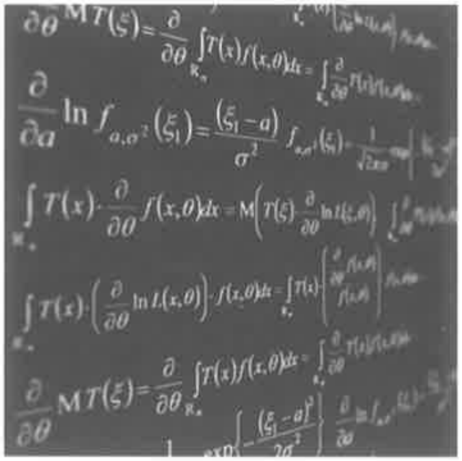
Primos de Mersenne

Alejandro Nivón Ruiz
Estudiante de Matemáticas Aplicadas y Actuaría del ITAM

Primero podemos decir que los números primos son todos aquellos números enteros mayores que 1 que son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad. Existen una infinidad de números primos, y fue Euclides quien realizó la primera demostración de la infinitud de los primos, alrededor del año 300 a. C.

Algunas aplicaciones las podemos encontrar por ejemplo en algoritmos que se utilizan en la obtención de la claves mediante la multiplicación de primos. Como el algoritmo RSA ó **sistema criptográfico con clave pública**, el cual es un algoritmo asimétrico cifrador de bloques, que utiliza una clave pública, y otra privada; la cual es guardada en secreto por su propietario. La seguridad de estos algoritmos radica en que no hay maneras rápidas de factorizar un número grande en sus factores primos utilizando computadoras tradicionales. La computación cuántica podría ofrecer una solución a este problema de factorización.

Podemos clasificar los números primos de distintas maneras, dependiendo de algunas propiedades o aplicaciones, por ejemplo:



- Los números de Fermat, tienen la forma $2^{2^n}+1$.
- Los números primos gemelos son pares de primos tales que p y $p+2$ son primos.
- Números reversibles: son aquellos que al leerlos al revés dan un nuevo número primo. Por ejemplo: 19 y 91 o 1201 y 1021

La investigación acerca de los números primos tiene ya varios siglos y sigue vigente hasta nuestros días pues aún quedan varias conjeturas por demostrar. Un sobresaliente resultado en el campo fue el de Sophie Germain ($1776-1831$), una matemática francesa que logró probar que para cualquier primo mayor a dos, la ecuación $x^p+y^p=z^p$ no tiene soluciones enteras no triviales, problema conocido como el Último Teorema de Fermat. Sophie únicamente lo probó para los primos p que cumplen que $2p+1$ también es un número primo; de ahí que esa clase de primos se denominen de Sophie Germain. Un dato curioso es que se conjetura que hay una infinidad de estos primos, pero el mayor número primo de Sophie Germain conocido hasta la fecha es el número $7068555 * 2^{121301}-1$, que tiene 36523 dígitos y fue hallado en 2005.

Una noticia que conmocionó al mundo matemático en días recientes fue el descubrimiento de dos números primos de Mersenne. Se dice que un número M es un número de Mersenne si es una unidad menor que una potencia de dos, es decir, los primos que se pueden escribir de la forma $M_n = 2^n - 1$. Estos números se denominan así en memoria del filósofo del siglo XVII Marin Mersenne, quien en su Cognitata Physico-Mathematica realizó una serie de postulados sobre ellos que sólo pudo refinarse tres siglos después. No se sabe si existen infinitos primos de Mersenne, pero son de los primos más grandes que se han hallado.

Miles de personas alrededor del mundo han participado en la *Great Internet Mersenne* Prime Search ó GIMPS, la cual se constituyó en 1996 para descubrir nuevos primos de Mersenne. Es un proyecto que combina los esfuerzos de docenas de expertos y miles de amateurs, y la potencia de miles de computadoras personales para buscar estas "agujas en un pajar". En su sitio web[1] se puede descargar el software gatuito para tener la posibilidad de encontrar un nuevo número.

Hasta septiembre de 2006 tan sólo se conocían 44 números de Mersenne, y el 23 de agosto de 2008 una computadora de la UCLA descubrió el cuadragésimo sexto primo de Mersenne conocido, $2^{43,112,609} - 1$, un número gigantesco de 12,978,189 dígitos.

Edson Smith, quien fue el responsable de instalar y mantener el programa desarrollado por GIMPS en las computadoras del Departamento de Matemáticas de la UCLA fue reconocido por el descubrimiento y se hizo acreedor al premio de US $100.000 de la Electronic Frontier Foundation (EFF) otorgado al descubrimiento del primer número primo con 10 millones de dígitos.
El 6 de septiembre de 2008, Hans-Michel Elvenich, de Langenfeld, cerca de Colonia, Alemania, descubrió el cuadragésimo quinto primo de Mersenne conocido, $2^{37,156,667} - 1$, un número de 11,185,272 dígitos. Éste fue el primer primo de Mersenne descubierto "fuera de orden", ya que es más pequeño que el número de Mersenne descubierto anteriormente. La dura competencia por el premio de la EFF duró más de una década y su final, fue demasiado estrecho, con tan solo 2 semanas de diferencia; para verificar que en realidad se trataba de números primos se tomó 13 días para el primer primo y 5 días para el segundo.

Mersenne compiló una lista de números primos de Mersenne con exponentes menores o iguales a 257, y conjeturó que eran los únicos números primos de esa forma. Su lista sólo resultó ser parcialmente correcta, ya que por error incluyó M_{67} y M_{257}, que son compuestos, y omitió $M6_1$, M_{89}, y M_{107}, que son primos; y su conjetura se revelaría falsa con el descubrimiento de números primos de Mersenne más grandes.

Preguntas abiertas

Desmentida la conjetura original han surgido otras preguntas abiertas relacionadas con la caracterización de estos números. En particular, la conjetura de Bateman, Selfridge y Wagstaff (1989), que también recibe el nombre de "Nueva conjetura de Mersenne". La Nueva conjetura de Mersenne establece que para cada número natural impar p, si se cumplen dos de las

1.http://www.mersenne.org/prime.htm

siguientes condiciones, también se cumple la tercera:

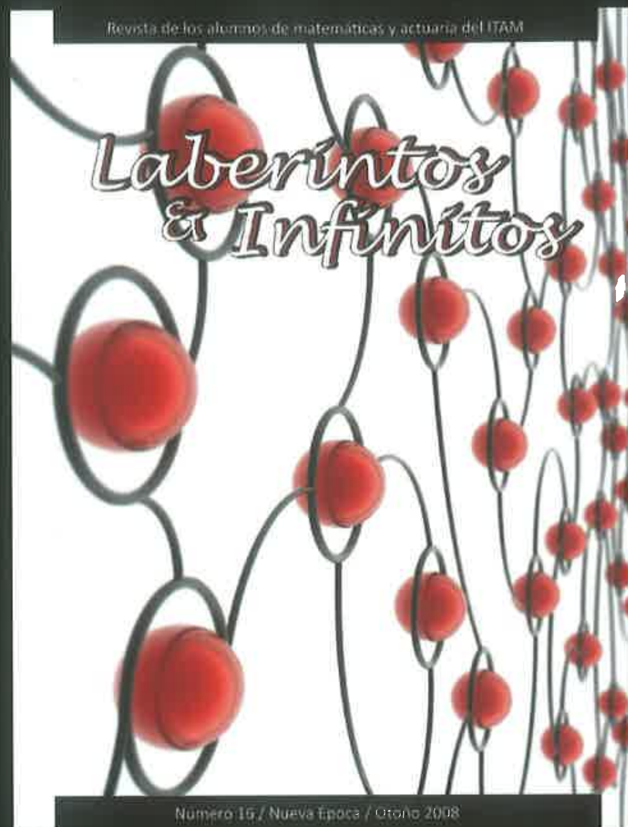
1. $p = 2^k \pm 1$ o $p = 4^k \pm 3$ para algún número natual k.
2. $2^p - 1$ es primo (un número primo de Mersenne).
3. $\frac{2^p+1}{3}$ es primo (un número primo de Wagstaff).

Lenstra, Pomerance y Wagstaff han conjeturado que existe un número infinito de primos de Mersenne.

Y CON MUCHO ORGULLO...

TWAS Rolac Science Education Prize

El premio lo otorga la Oficina Regional para América Latina y el el Caribe (Rolac por sus siglas en inglés) de la Academia de Ciencias de países en vías de desarrollo (TWAS), conformado por las Academias de Ciencias de los diversos países. Se otorga cada tres años a aquel científico que haya hecho una labor destacada y a todos los niveles, en Educación Científica, en su país.
Este año el doctor Carlos Bosch Giral, profesor de tiempo completo del Itam fue distinguido con este premio por su destacada labor en Educación Científica. Desde hace treinta años Carlos Bosch ha trabajado con profesores en servicio de todos los niveles y particularmente en Matemáticas, que es su especialidad. Hacia el final de los años 80 inició las Olimpiadas Nacionales de Matemáticas para nivel de Bachillerato. Hacia la década de los 90 fundó nuevos concursos para estudiantes más jóvenes, para Secundaria, la Olimpiada de Primavera y para primaria el Concurso Cotorrra. Desde hace varios años ha dedicado mucho trabajo para "La Ciencia en tu Escuela", programa de la Academia Mexicana de Ciencias del que es fundador y coordinador. Este programas está dirigido a maestros en servicio y abarca todas las Ciencias.
El premio ROLAC junto con otros que otorga la TWAS fueron presentados el 10 de noviembre del presente año durante la Asamblea General de la TWAS que se llevó a cabo en la ciudad de México en la sede de la Academia Mexicana de Ciencias.



Zulaut! productions