Soluciones Zona Olímpica #45

Problema 1

Enunciado

Sea

$$f(a) = 101^a - 101(100)^a + \frac{101(100)}{2}(99)^a - \frac{101(100)(99)}{6}(98)^a + ...$$

si $A = \{a : a \in \mathbb{N} | f(a) = 0\}$ encuentre $\sum_{a \in A} a$

Solución

Suponga que quiere contar cuantas funciones suprayectivas hay de un conjunto con a elementos a un conjunto con 101 elementos.
Usando inclusión exclusión obtenemos que el numero de funciones suprayectivas es

$$\sum_{i=1}^{101} (-1)^r \binom{101}{i} (101 - i)^a$$

que no es otra cosa mas que $f(a)$.
Para que la cantidad de funciones suprayectivas sea igual a cero eso es porque $a < 101$.
Por lo tanto

$$\sum_{a \in A} a = \sum i = 1^{100} i = \frac{101 * 100}{2} = 5050.$$

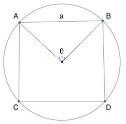
Problema 2

Enunciado

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en el círculo, con el lado AB de longitud a y AB subtiende el angulo θ en el centro del círculo. Muestre que si se maximiza el área A del cuadrilátero esta puede ser expresada como p,q y r son enteros positivos.

$$A_{max} = \frac{a^2}{p(1 - cos\theta)} \times \left(qsen\left(\frac{2\pi - \theta}{r}\right) + sen\theta \right)$$

donde p,q y r son enteros positivos.



1.28242712910062263687534256886979172776768892732500119206374002174040630885

Solución

Sea r el radio del círculo, entonces por la ley de los cosenos se tiene que $a^2 = r^2 + r^2 - 2r\dot{r}cos\theta$, lo que directamente implica que

$$r^2 = \frac{a^2}{2(1 - cos\theta)}.$$

Sean O el centro del circulo, $\angle BOC = x_1$, $\angle COD = x_2$ y $\angle DOA = x_3$.
Entonces el área del cuadrilátero es

$$A = \frac{1}{2}\left(sen\theta + senx_1 + senx_2 + senx_3\right)$$

entonces la función a maximizar es $(senx_1 + senx_2 + senx_3)$ sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 = 2\pi - \theta$. Este problema se puede resolver de muchas maneras, en particular si usamos la desigualdad de Jensen sobre $f(x) = senx$ obtenemos que el máximo se alcanza cuando

$$(\operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2 + \operatorname{sen} x_3) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi - \theta}{3}\right)$$

y entonces el area maxima se puede expresar como

$$A_{max} = \frac{a^2}{4(1 - cos\theta)} \times \left(3sen\left(\frac{2\pi - \theta}{3}\right) + sen\theta\right).$$

Problema 3

Enunciado

Sea $D_n(g) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k g^{2^k}}{g(1 + g^{2^k})}$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} D_n(\frac{1}{2017}) = \frac{a}{b}$

Solución

Manipulamos la suma de la siguiente manera:

$$D_n(g) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k g^{2^k}}{g(1 + g^{2^k})}.$$

$$D_n(1/x) = x\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k(x^{2^k} - 1)}{x^{2^{k+1}} - 1}.$$

$$D_n(1/x) = x\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^{2^k}}{x^{2^{k+1}} - 1} - \frac{2^k}{x^{2^{k+1}} - 1}$$

1.2824271291006226368753425688697917277676889273250011920637400217404063088

Usando fracciones parciales obtenemos

$$\frac{x^{2^k}}{x^{2^{k+1}}-1} = \frac{1}{x^{2^k}-1} - \frac{1}{x^{2^{k+1}}-1}$$

lo que directamente implica

$$D_n(1/x) = x\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}-1} - \frac{2^k}{x^{2^{k+1}}-1} - \frac{2^k}{x^{2^{k+1}}-1}$$

que es lo mismo a

$$D_n(1/x) = x\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}-1} - \frac{2^{k+1}}{x^{2^{k+1}}-1}.$$

Nos damos cuenta que $D(n)$ es una suma telescópica y obtenemos que

$$D_n(1/x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\frac{1}{2017} = \frac{2017}{2016}$$

lo que implica que

$$2 \times a - b = 2018$$

Problema 4

Enunciado

La expresión $(a+b)^n = a^n + b^n$ es llamada "el sueño del estudiante " y es claramente falsa. La expresión $(a+b)^p = a^p + b^p \mod p$ con p primo si es verdadera, demuéstrela y encuentre un contra ejemplo en el caso de que p no sea primo.

Solución

Primero vemos por el teorema del binomio que

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k + y^{p-k}.$$

Note que el primer término y el ultimo ($\binom{p}{0}$ y $\binom{p}{p}$) son iguales a 1, el truco es ver que todos los demás términos ($\binom{p}{k}$ con $i = 1, \ldots, k-1$) son divisibles por p y así obtener que $(a+b)^p = a^p + b^p \mod p$. $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k!)}$ con $1 \leq k \leq p$, el numerador claramente es divisible por p porque $p!$ contiene a p, el de numerador esta formado por el producto de dos números que son productos de números más pequeños que p por lo tanto no puede ser divisible por p porque p es primo. Ahora, como *binompk* es entero, el numerador divide a p y el de numerador no divide a p entonces p divide a *binompk* y podemos concluir que $(a+b)^p = a^p + b^p \mod p$.

Problema 5

Enunciado

Pruebe que $2^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k\alpha) = \dfrac{\sin(2^n\alpha)}{\sin(\alpha)}$, mejor conocida como la ley de Morrie.

Solución

La formula del doble angulo dice que $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.
Despejamos para el coseno y obtenemos que $\cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2\sin(\alpha)}$, lo que directamente implica que $\cos(2^{k-1}\alpha) = \frac{\sin(2^k\alpha)}{2^k\sin(\alpha)}$.
Esta identidad genera un producto telescópico

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\cdots\cos(2^{n-1}\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2\sin(\alpha)}\cdot\frac{\sin(4\alpha)}{2\sin(2\alpha)}\cdot\frac{\sin(8\alpha)}{2\sin(4\alpha)}\cdots\frac{\sin(2^n\alpha)}{2\sin(2^{n-1}\alpha)}.$$

Podemos concluir que $2^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k\alpha) = \dfrac{\sin(2^n\alpha)}{\sin(\alpha)}$.