Soluciones Zona Olímpica #44

Problema 1

Enunciado

Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfagan

$$f(x_1) - f(x_2) \leq (x_1 - x_2)^2$$

para todo x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$.

Solución

Sale directamente de la desigualdad que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{|x_1 - x_2|} \leq |x_1 - x_2|$$

entonces la derivada de f existe en todo x_2 en $\mathbb{R}$ y es igual a cero. Por el teorema fundamental del calculo, la función f es una constante.

Problema 2

Enunciado

¿Qué es más grande, $\log_2 3$ o $\log_3 5$?
Sugerencia: Compare ambos números con $\dfrac{3}{2}$.

Solución

Las funciones 2^x, 3^x y x^2 son monótonas en los reales positivos, entonces la composición de estas también los es. Podemos usarlas para simplificar los cálculos en las desigualdades.
Comparamos primero $\log_2 3$ con $\dfrac{3}{2}$

$$\left(2^{\log_2 3}\right)^2 = 3^2 = 9 > 8 = 2^3 = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

y obtenemos $\log_2 3 > \dfrac{3}{2}$.
Comparamos ahora $\log_3 5$ con $\dfrac{3}{2}$

$$\left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25 < 27 = 3^3 = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

y obtenemos $\log_3 5 < \dfrac{3}{2}$.
Por lo tanto $\log_3 5 < \log_2 3$

Problema 3

Enunciado

Probar que existe una infinidad de ternas (x, y, z) de enteros positivos que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^3$.

Solución

Sean a y b dos números enteros dados y sea $z = a^2 + b^2$. Si definimos $x = za$ y $y = zb$, entonces la terna (xyz) satisface la ecuación.

Problema 4

Enunciado

Demostrar que no existe ninguna pareja de primos p, q, con $p < q$ que satisfagan la propiedad de que $p^2 + pq + 6q - 1$ sea múltiplo de pq.

Solución

Supongamos que p y q son dos primos que cumplen que $p^2 + pq + 6q - 1$ es múltiplo de pq. Entonces

$$p^2 + pq + 6q - 1 \equiv 0 \mod pq,$$

por lo tanto

$$p^2 - 1 \equiv 0 \mod q.$$

De aquí obtenemos que $q|p^2 - 1$, lo que implica que $q|\,(p-1)\,(p+1)$. Como q es primo y $p < q$, entonces $q|p+1$, pero como $p < q$, entonces $q = p + 1$.
Solo existen dos primos q y p con la propiedad de que $q = p+1$ y estos son 2 y 3, si sustituimos en la ecuación del principio obtenemos

$$2^2 + 2 * 3 + 6 * 3 - 1 \equiv 27 \equiv 3 \mod 2 * 3,$$

lo cual claramente es una contradicción.

Problema 5

Enunciado

Prueba que si α esta dado por los decimales .999...., donde por lo menos hay 100 nueves, entonces $\sqrt{\alpha}$ tiene 100 nueves al principio.

Solución

Si α es menor a 1, entonces $\sqrt{\alpha}$ es menor a 1.
Suponga que $\sqrt{\alpha}$ en su representación decimal tiene menos de 100 nueves al principio. Esto implica que

$$\alpha < 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200}.$$

Pero $1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$, entonces $\alpha < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ lo que implica que α no puede tener 100 nueves al principio, lo cual es claramente una contradicción.

Problema 6

Enunciado

Sea $x = 123456789(10)(11)(12)(13)(14)_{15}$ (base 15). ¿Cuál es residuo si dividimos x entre 7?

Solución

El residuo de 15 entre 7 es 1, es fácil ver por inducción matemática que cualquier número de la forma 15^n al dividirlo por 7 deja como residuo 1.
Si la suma $1 + 2 + 3 + ... + 14 = 105$ es restada de x obtenemos que

$$13(15 - 1) + 12(15^2 - 1) + 11(15^3 - 1) + ... + 1(15^{13} - 1),$$

este número es claramente divisible entre 7 y como 105 es también divisible entre 7 eso implica que x es divisible entre 7 y por lo tanto el residuo es 0.

Problema 7

Enunciado

Prueba que si $x + \frac{1}{x} = 2cos(\alpha)$, entonces $x^n + \frac{1}{x^n} = 2cos(n\alpha)$

Solución

Reescribimos la ecuación $x+\dfrac{1}{x} = 2cos(\alpha)$ como $x^2+1 = 2xcos(\alpha)$ o como $x^2-2xcos(\alpha)+1 = 0$.
Entonces, $x = cos(\alpha) \pm \sqrt{cos^2(\alpha)-1} = cos(n\alpha) \pm isen(\alpha)$.
Del teorema de De Moivre sale que $x^n = cos(n\alpha) \pm isen(n\alpha)$ y que $\dfrac{1}{x^n} = cos(n\alpha) \mp isen(n\alpha)$, si los sumamos obtenemos que $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2cos(n\alpha)$.

Problema 8

Enunciado

Encuentre todos los primos p tales que $2^p + p^2$ es primo.

Solución

Note que si $p = 2$, entonces $2^p + p^2 = 8$. No es un primo.
Note que si $p = 3$, entonces $2^p + p^2 = 17$. Si es un primo.
Sea $p > 3$ un primo dado.
Entonces $p \equiv 1 \bmod 3$ 0 $p \equiv 2 \bmod 3$, lo que implica que $p^2 \equiv 1^2 \equiv \bmod 3$ o $p^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \bmod 3$, por lo tanto $p^2 \equiv 1 \bmod 3$.
Note que p es impar y que $2^p \equiv -1 \bmod 3$.
Por lo tanto $2^p + p^2 \equiv 0 \bmod 3$ para todo primo p, lo que implica que el único primo con esa propiedad es el 3.