Soluciones Zona Olímpica #43

Problema 1

Enunciado

Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfagan

$$f\left((x-y)^2\right) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2.$$

Solución

Para $y = 0$ se tiene que $f\left(x^2\right) = f(x)^2 - 2xf(0)$ y, para $x = 0$, tenemos que $f\left(y^2\right) = f(0)^2 + y^2$. Sustituyendo $y = 0$ en la segunda ecuación vemos que $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$. Por otro lado, igualando ambas ecuaciones,

$$f(x)^2 - 2xf(0) = f(0)^2 + x^2,$$

es decir,

$$f(x)^2 = (x + f(0))^2.$$

Sustituyendo en la ecuación original obtenemos que

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{f(x)^2 - f\left((x-y)^2\right) + y^2}{2x} \\ &= \frac{(x+f(0))^2 - (x-y+f(0))^2 + y^2}{2x} \\ &= y + f(0). \end{aligned}$$

Así, las únicas soluciones son $f(x) = x$ y $f(x) = x + 1$.

Problema 2

Enunciado

Calcula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}.$$

Sugerencia: Usa tu telescopio.

1.28242712910062263687534256886979172776768892732500119206374002174040630885

Solución

Note que $\frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}}{2}$. Así, al sumar desde 1 hasta ∞ todos los términos menos $\frac{\frac{1}{1}}{2}$ y $\frac{\frac{1}{2}}{2}$ se cancelan (suma telescópica), y la suma vale $\frac{3}{4}$.

Problema 3

Enunciado

Encuentra el rango de

$$f(x) = \frac{\sin(x)(3\cos^2(x) + \cos^4(x) + 3\sin^2(x) + \sin^2(x)\cos^2(x))}{\tan(x)(\sec(x) - \sin(x)\tan(x))}$$

si $x \neq \frac{n\pi}{2}$.

Solución

Factorizando el numerador y escribiendo el denominador con fracciones, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x)(3+\cos^2(x))(\sin^2(x)+\cos^2(x))}{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)} \\ &= \frac{\sin(x)(3+\cos^2(x))}{\frac{\sin(x)(1-\sin^2(x))}{\cos^2(x)}} \\ &= \frac{\sin(x)(3+\cos^2(x))}{\frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= 3+\cos^2(x). \end{aligned}$$

Como $\cos(x) \in (0,1)$ si $x \neq \frac{n\pi}{2}$, $f(x) = 3+\cos^2(x) \in (3,4)$, y ese es el rango de f.

Problema 4

Enunciado

Encuentra la suma de todos los enteros positivos pares menores a 233 y no divisibles por 10.

Solución

Es más fácil encontrar la suma de todos los enteros positivos pares menores a 233, y luego la suma de los enteros positivos menores a 233 divisibles por 10. La diferencia es la respuesta. La primera suma es $2+4+\cdots+232 = 2(1+2+\cdots+116) = 116 \cdot 117 = 13,572$. La segunda suma es $10+20+\cdots+230 = 10(1+2+\cdots+23) = 5 \cdot 23 \cdot 24 = 2,760$. La respuesta es entonces $13,572 - 2,760 = 10,812$.

Problema 5

Enunciado

Calcula

$$\int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{2017} dx.$$

Solución

Note que, por la regla de la cadena, $\frac{d}{dx}(\ln x)^n = n\frac{(\ln x)^{n-1}}{x}$. Utilizando integración por partes tenemos que

$$\int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{2017} dx = -\frac{(\ln x)^{2017}}{2016x^{2016}}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{2017(\ln x)^{2016}}{2016x^{2017}}dx.$$

El primer término vale cero porque $\ln(1) = 1$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{2017}}{x^{2016}} = 0$. Así,

$$\int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{2017} dx = \int_1^\infty \frac{2017(\ln x)^{2016}}{2016x^{2017}}dx,$$

de donde, vía un argumento recursivo,

$$\int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{2017} dx = \frac{2017!}{2016^{2017}} \int_1^\infty \frac{1}{x^{2016}}dx = \frac{2017!}{2016^{2018}}.$$

Problema 6

Enunciado

Dados dos números reales positivos x, y, se tiene que $x \diamond y$ es un número real positivo definido en términos de x e y por una regla fija y desconocida ($\diamond$ es una operación binaria). La operación $\diamond$ satisface $(xy) \diamond y = x(y \diamond y)$ y $(x \diamond 1) \diamond x = x \diamond 1$ para todos $x, y > 0$. Si $1 \diamond 1 = 1$, encuentra $19 \diamond 98$.

Solución

Note que $x \diamond 1 = (x \cdot 1) \diamond 1 = x \cdot (1 \diamond 1) = x \cdot 1 = x$, y que $x \diamond x = (x \diamond 1) \diamond x = x \diamond 1 = x$. Así, $(x \cdot y) \diamond y = x \cdot (y \diamond y) = x \cdot y$, de donde $19 \diamond 98 = (\frac{19}{98} \cdot 98) \diamond 98 = \frac{19}{98}(98 \diamond 98) = \frac{19}{98} \cdot 98 = 19$.

Problema 7

Enunciado

Sea k un entero positivo y λ un número real positivo. Prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Sugerencia: Abre tus apuntes de Probabilidad.

Solución

Este límite básicamente dice que la distribución Binomial(n,p) se aproxima bien mediante una distribución Poisson$(\lambda = np)$ si n es grande. El límite se prueba como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{k!}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{\left(\frac{n}{\lambda}-1\right)^k}\right] \cdot \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}\lambda}\right] \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n^k - (1+\cdots+(k-1))n^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}(k-1)!}{\frac{1}{\lambda^k}n^k - \binom{k}{1}\frac{1}{\lambda^{k-1}}n^{k-1} + \cdots + (-1)^k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\lambda^k}} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.
\end{aligned}$$