Soluciones de Zona Olímpica #42

Problema 1

Enunciado

Prueba que en el producto $P = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot ... \cdot 100!$ se puede eliminar uno de los factores de manera que el producto restante sea un cuadrado perfecto.
Sugerencia: $(2k)! = (2k-1)! \cdot 2k$.

Solución

Note que, utilizando la sugerencia,

$$\begin{aligned} P &= 1! \cdot 1! \cdot 2 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5! \cdot 5! \cdot 6 \cdot ... \cdot 99! \cdot 99! \cdot 100 \\ &= 1!^2 \cdot 3!^2 \cdot 5!^2 \cdot ... \cdot 99!^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 100 \\ &= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot ... \cdot 99!)^2 \cdot 2^{50} \cdot (1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 50) \\ &= \left(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot ... \cdot 99! \cdot 2^{25}\right)^2 \cdot 50! \end{aligned}$$

Luego, si se quita el factor $50!$, P será un cuadrado perfecto.

Problema 2

Enunciado

Encuentra el producto de todos los números reales x que satisfacen

$$2^{3x+1} - 17 \cdot 2^{2x} + 2^{x+3} = 0.$$

Solución

Reescribir la ecuación como $2^x(2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot (2^x) + 8) = 0$, o $2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot (2^x) + 8$. Haciendo la sustitución $y = 2^x$, se llega a una ecuación cuadrática, cuyas soluciones son $y = 8, \frac{1}{2}$. Regresando a x, se obtiene que las soluciones son $x = -1, 3$, por lo que su producto es -3.

Problema 3

Enunciado

Encuentra todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos menores que 10 tales que su producto sea divisible por 20.

Solución

Un número debe ser 5. Los otros deben tener producto divisible por 4. Hay dos casos: o ambos números son pares, o uno es divisible por 4 y el otro es impar. En el primer caso hay $48 = 3 \times 4 \times 4$ posibles ternas (tres lugares para el 5 y cuatro posibles números pares menores que 10 para los otros dos). En el segundo caso hay $54 = 3 \times 2 \times 9$ posibles ternas (tres lugares para el múltiplo de 4 y dos posibilidades para éste, y nueve maneras de escoger los dos lugares restantes utilizando al menos un 5). Así, en total hay $102 = 48 + 54$ posibles ternas. Se deja como ejercicio al lector escribir todas.

Problema 4

Enunciado

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *súper convexa* si

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|$$

para cualesquiera números reales x, y. Prueba que no existe ninguna función súper convexa.

Solución

Sea $n \geq 1$. Para cada entero i define

$$\Delta_i = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Si en la desigualdad del enunciado substituimos $x = \frac{i+2}{n}$ e $y = \frac{i}{n}$, tenemos que

$$\frac{f\left(\frac{i+2}{n}\right) + f\left(\frac{i}{n}\right)}{2} \geq f\left(\frac{i+1}{n}\right) + \frac{2}{n} \quad i = 1, 2, ..., n,$$

o bien

$$f\left(\frac{i+2}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \geq f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{4}{n} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

En otras palabras, $\Delta_{i+1} \geq \Delta_i + \frac{4}{n}$. Juntando esto para n valores consecutivos de i obtenemos que

$$\Delta_{i+n} \geq \Delta_i + 4.$$

Sumando esta desigualdad desde $i = 0$ hasta $n - 1$ y cancelando términos, tenemos que

$$f(2) - f(1) \geq f(1) - f(0) + 4n.$$

Esto no se puede cumplir para toda $n \geq 1$. Ergo, no existe ninguna función súper convexa.

Problema 5

Enunciado

Prueba que

$$\sec^{2n}(x) + \csc^{2n}(x) \geq 2^{n+1}$$

para cualquier entero $n \geq 0$ y para cualquier $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

De la desigualdad MA-MG (media aritmética - media geométrica) tenemos que

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 \geq 2\tan x \text{ y } \csc^2 x = \cot^2 x + 1 \geq 2\cot x.$$

Se sigue entonces que

$$\sec^{2n} x + \csc^{2n} x \geq 2^n \left(\tan^n x + \cot^n x\right).$$

Note que

$$\tan^n x + \cot^n x = \tan^n x + \frac{1}{\tan^n x} \geq 2,$$

de nuevo por la desigualdad MA-MG. Así,

$$\sec^{2n} x + \csc^{2n} x \geq 2^{n+1},$$

como queríamos.

Problema 6

Enunciado

Encuentra el divisor primo más pequeño de

$$5^{2016} + 1.$$

Solución

Como 5 elevado a cualquier potencia es impar, ese número debe ser par. Luego, 2 lo divide y, como éste es el primo más pequeño, entonces es la solución.

Problema 7

Enunciado

Encuentra todos los enteros n para los cuales la expresión

$$\frac{n^3 - 3n^2 + 4}{2n - 1}$$

es un entero.

Solución

Si multiplicamos la fracción por 8, ésta seguiría siendo un entero. Note que

$$8\frac{n^3 - 3n^2 + 4}{2n - 1} = 4n^2 - 10n - 5 + \frac{27}{2n - 1}.$$

Luego, $2n-1$ debe dividir a 27. Eso ocurre cuando $2n - 1 = \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$, es decir, cuando $n = -13, -4, -1, 1, 2, 5, 14$. Es fácil ver a mano que para todos esos números la fracción original es un entero.