Soluciones de Zona Olímpica #41

Problema 1

Enunciado

Encuentra las soluciones de enteros positivos de la ecuación

$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

Solución

Note que x e y tienen los mismos factores primos, digamos

$$x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \qquad y = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}.$$

La igualdad del problema puede entonces escribirse como

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i(x+y)} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i(y-x)}.$$

Luego, $\alpha_i(x+y) = \beta_i(y-x)$ para $i = 1, 2, ..., k$. De ahí se deduce que $\alpha_i < \beta_i$ para toda i y, por lo tanto, $x|y$. Escribiendo $x = zy$, la ecuación se convierte en $x^{x(z+1)} = (xz)^{x(z-1)}$, lo que implica que $x^2 = z^{z-1}$ e $y^2 = (xz)^2 = z^{z+1}$. Una potencia es cuadrado perfecto si la base es un cuadrado perfecto o si el exponente es par. Si $z = t^2$, con $t \geq 1$, entonces $x = t^{t^2-1}$ e $y = t^{t^2+1}$, y esa es una familia de soluciones. Si $z - 1 = 2s$, con $s \geq 0$, obtenemos la segunda familia de soluciones: $x = (2s+1)^s$ e $y = (2s+1)^{s+1}$.

Problema 2

Enunciado

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua tal que $f(f(x)) = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Determina todos los posibles valores de

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Solución

Como $f \leq 1$, entonces $\int_0^1 f \leq 1$ también. Como $f(f(x)) = 1$ para todo $x \in [0,1]$, entonces $f(x) = 1$ para todo x en el rango de f. Como 1 está en dicho rango, entonces $f(1) = 1$. Como f es continua en un intervalo cerrado y acotado, entonces alcanza un valor mínimo c. Como c está en el rango de f, entonces $f(c) = 1$. Si $c = 1$, entonces $f \equiv 1$ y $\int_0^1 f = 1$.

Si $c<1$, entonces usamos el teorema del valor intermedio (dado que f es continua): f alcanza cualquier valor entre c y 1. Luego, como $[c,1]$ está en el rango de f, $f(x)=1$ para toda $x\in[c,1]$. Así,

$$\int_0^1 f = \int_0^c f + (1-c).$$

Ahora bien, como $f\geq c$, entonces $\int_0^c f > c^2$. La desigualdad es estricta porque f es continua y $c<1$: f no puede valer c antes de c y 1 en c. Luego,

$$\int_0^1 f > c^2 + (1-c) = \left(c-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Entonces $\frac{3}{4} < \int_0^1 f \leq 1$, y es fácil ver que cualquier valor de ese intervalo se puede alcanzar.

Problema 3

Enunciado

Encuentra todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfagan

$$f\left(x^2-y^2\right) = (x-y)\left(f(x)+f(y)\right).$$

Solución

Sustituyendo $x=y$, obtenemos que $f(0)=0$. Sustituyendo $x=-1, y=0$, obtenemos que $f(1)=-f(-1)$. Sustituyendo $x=a, y=\pm 1$, obtenemos que

$$f(a^2-1) = (a-1)\left(f(a)+f(1)\right),$$
$$f(a^2-1) = (a+1)\left(f(a)-f(1)\right).$$

Igualando y despejando $f(a)$, obtenemos que $f(a)=f(1)a$ para toda a. Luego, f debe ser lineal. Conversamente, es fácil ver que cualquier función lineal $f(x)=kx$ satisface la ecuación.

Problema 4

Enunciado

Prueba que las raíces del polinomio con coeficientes complejos dado por

$$p(z) = z^7 + 7z^4 + 4z + 1$$

están adentro del disco de radio 2 centrado en el origen.

Solución

Procedemos por contradicción. Supongamos que existe z con $|z| > 2$ tal que $P(z) = 0$. Entonces, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned}
0 &= \left|\frac{P(z)}{z^7}\right| \\
&= \left|1 + \frac{7}{z^3} + \frac{4}{z^6} + \frac{1}{z^7}\right| \\
&\geq 1 - \frac{7}{|z|^3} - \frac{4}{|z|^6} - \frac{1}{|z|^7} \\
&\geq 1 - \frac{7}{8} - \frac{4}{64} - \frac{1}{128} \\
&= \frac{7}{128} > 0,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Entonces concluimos que toda raíz de P está en el disco centrado en el origen de radio 2.

Problema 5

Enunciado

Prueba que para cada número natural n existen n enteros consecutivos tal que cada uno de ellos es divisible por dos primos distintos.

Solución

Sean $p_1, p_2, ..., p_{2n}$ primos distintos. Por el Teorema Chino del Residuo, existe x tal que

$$\begin{aligned}
&x \equiv 0 \pmod{p_1 p_2}, \\
&x \equiv -1 \pmod{p_3 p_4}, \\
&\vdots \\
&x \equiv -n+1 \pmod{p_{2n-1} p_{2n}}.
\end{aligned}$$

Luego, los números $x + k$, $0 \leq k \leq n-1$, son todos divisibles por $p_{2k+1} p_{2k+2}$, como queríamos.

Problema 6

Enunciado

Para una sucesión $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, define la n-ésima suma parcial, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Prueba que, para cualquier entero positivo n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1} = \frac{2^n}{n+1} S_{n+1}.$$

Solución

Note que, para $k = 0, 1, ..., n$,

$$(a_{k+1} + a_{n-k+1})(n+1) = 2S_{n+1}.$$

Si sumamos las dos sumas (iguales) $\sum_k \binom{n}{k} a_{k+1}$ y $\sum_k \binom{n}{n-k} a_{n-k+1}$ a cada lado, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_{k+1} + a_{n-k+1}) = \frac{2S_{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}}{n+1} S_{n+1},$$

de donde se sigue el resultado.

Problema 7

Enunciado

Un polinomio real no-cero $p(x)$ satisface $p(x) = p'(x)p''(x)$ para cualquier x. ¿Cuál es el coeficiente principal de $p(x)$?

Solución

Supongamos que el término principal de p es cx^n, con $c \neq 0$. Entonces los términos principales de p' y p'' son, respectivamente, cnx^{n-1} y $cn(n-1)x^{n-2}$. Luego, $cx^n = (cnx^{n-1})(cn(n-1)x^{n-2})$, de donde $n = (n-1) + (n-2)$, o $n = 3$. Así, $c = cn \cdot cn(n-1) = 18c^2$, o $c = \frac{1}{18}$.

Problema 8

Enunciado

Para $x > 0$, define $f(x) = x^x$. Encuentra todos los valores de x para los cuales $f(x) = f'(x)$.

Solución

Sea $g(x) = \log(f(x)) = x \log(x)$. Encontes $f'(x)/f(x) = g'(x) = 1 + \log(x)$. Así, $f' = f$ cuando $g' = 1$, es decir, cuando $\log(x) + 1 = 1$ o $x = 1$.