Soluciones de Zona Olímpica

1. Considerar las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen la condición

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1 \tag{1}$$

para todos los valores $m, n \in \mathbb{N}$. Encontrar todos los valores que $f(2007)$ puede tomar.
Solución:
La respuesta es $1, 2, ..., 2008$. La argumentación es la que sigue:
Supongamos que existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple (1). Para enteros arbitrarios positivos $m > n$, por (1) tenemos $f(m) = f(n+(m-n)) \geq f(n)+f(f(m-n))-1 \geq f(n)$, por lo que f es no-decreciente.
la función $f \equiv 1$ es una solución trivial. Para encontrar otras soluciones asumamos que $f \not\equiv 1$ y tomemos el menor $a \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) > 1$. Entonces $f(b) \geq f(a) > 1$ para todos los enteros $b \geq a$.
Ahora supongamos que $f(n) > n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Con esto tenemos que $f(f(n)) = f((f(n)-n)+n) \geq f(f(n)-n)+f(f(n))-1$, de donde $f(f(n)-n) \leq 1$ y así $f(n)-n < a$. Entonces existe un valor máximo de la expresión $f(n)-n$; denotando este valor c y teniendo que $f(k) - k = c \geq 1$. Aplicando la monotocidad junto a (1) obtenemos

$$\begin{aligned}
2k + c &\geq f(2k) \\
&= f(k+k) \\
&\geq f(k) + f(f(k)) - 1 \\
&\geq f(k) + f(k) - 1 \\
&= 2(k+c) - 1 \\
&= 2k + (2c-1),
\end{aligned}$$

de donde $c \leq 1$ y $f(n) \leq n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular $f(2007) \leq 2008$. Una familia de funciones que muestran que todos los valores entre 1 y 2008 se pueden alcanzar son:

$$f_j(n) = \text{máx}\{1, n+j-2007\} \text{ para } j = 1, 2, ..., 2007 \text{ y}$$

$$f_{2008}(n) = \begin{cases} n, & 2007 \nmid n \\ n+1, & 2007 \mid n \end{cases}$$

0.207879576350761908546955619834978770033877841631769608075135883055419877

2. Sean $x_1, x_2, ..., x_{100}$ números reales no negativos tales que $x_i + x_{i+1} + x_{i+1} \leq 1$ para todo $i = 1, ..., 100$ (se ponen $x_{101} = x_1$ y $x_{102} = x_2$). Encontrar el máximo valor posible para

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}.$$

Solución:
La respuesta es $\frac{25}{2}$. Para llegar a esto hagamos $x_{2i} = 0$ y $x_{2i-1} = \frac{1}{2}$ para todo $i = 1, 2, ..., 50$. Entonces $S = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$. Así sólo falta probar que $S \leq \frac{25}{2}$ para todos los valores de x_i's que satisfagan las condiciones del problema.
Considerar cualquier $1 \leq i \leq 50$. Por la condición del problema tenemos que $x_{2i-1} \leq 1 - x_{2i} - x_{2i+1}$ y $x_{2i+2} \leq 1 - x_{2i} - x_{2i+1}$, entonces por la desigualdad MA-MG obtenemos:

$$\begin{aligned} x_{2i-1}x_{2i+1} + x_{2i}x_{2i+2} &\leq (1 - x_{2i} - x_{2i+1})x_{2i+1} + x_{2i}(1 - x_{2i} - x_{2i+1}) \\ &= (x_{2i} + x_{2i+1})(1 - x_{2i} - x_{2i+1}) \\ &\leq \left(\frac{(x_{2i} + x_{2i+1}) + (1 - x_{2i} - x_{2i+1})}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades para $i = 1, ..., 50$ obtenemos la desigualdad querida:

$$\sum_{i=1}^{50} (x_{2i-1}x_{2i+1} + x_{2i}x_{2i+2}) \leq 50 \cdot 4 = \frac{25}{2}.$$

3. Hallar el menor entero positivo que use, para su escritura en notación decimal, exactamente dos dígitos y sea divisible por todos los números del 1 al 9.
Solución:
Para resolver este problema notemos que el número debe ser divisible entre 5 y 9, por lo cual el número que buscamos tiene como dígito final el 0 y, para minimizar la cantidad de dígitos que lo compone deberá tener 3, 6 o 9 como el otro dígito que se use, además del 0. Ahora hay que revisar que ese número que construimos sea divisible por los demás números en {1,2,...,9}.
Para el caso en el que se use 9, tenemos que el número que buscamos termina en 000; para minimizarlo asumamos que el número tiene cuatro dígitos, pero $9000 \equiv 5 (\bmod 7)$, por lo que para hacerlo divisible entre siete debemos agregarle un 9 en la séptima posición pues $90000000 \equiv 2 (\bmod 7)$. Revisar que 9009000 es el mínimo número formado con ceros y nueves que cumple lo que se pide es sencillo.
Pasemos al segundo paso en el que el dígito usado sea 3, aquí se puede hacer notar que el menor número que cumple las características buscadas tiene al menos 8 dígitos.
Para el caso de 6, sabemos que $8|600$, por lo que es suficiente buscar un número que sea divisible por siete. Sin dificultad se llega a que el número que buscamos es 6060600, el

cual es menor al número que ya teníamos (el 9009000). Por lo cual 6060600 es el número que buscamos.

4. Las integrales definidas, entre cero y uno, de los cuadrados de las funciones reales continuas $f(x)$ y $g(x)$ son iguales a 1. Probar que existe un número real c tal que $f(c)+g(c) \leq 2$.
Solución:
Una solución agradable y bonita para este problema es suponer que no es cierto y que $f(x)+g(x) > 2$ para todo $x \in [0,1]$. Por una desigualdad de números reales conocida tenemos que $f^2(x)+g^2(x) \geq \frac{1}{2}(f(x)+g(x))^2 > 2$. Como la integral preserva las desigualdades $\int_0^1 2dx = 2 < \int_0^1 (f^2(x)+g^2(x))dx = \int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 g^2(x)dx = 2$; luego $2 < 2$, lo que es una contradicción y entonces $f(c)+g(c) < 2$ para algún $c \in [0,1]$.

5. Por un canal de comunicación se va a transmitir un mensaje con 12 símbolos diferentes. Además de los 12 símbolos, el transmisor también enviará un total de 45 espacios en blanco entre los símbolos, con tres espacios como mínimo entre cada par de símbolos. ¿De cuántas formas puede el transmisor mandar el mensaje?
Solución:
Consideramos primero el orden que tomaran los 12 símbolos, estos se pueden ordenar de 12! fromas distintas. De los 45 espacios en blanco restamos los que irán entre los símbolos como mínimo, dejándonos por acomodar 12 espacios. Estos espacios se pueden çolocar"pensando en las combinaciones de 2 tipos de objetos distintos: los espacios en blanco y los carácteres que ya determinamos. Esto se calcula como las combinaciones de (10+12) en 10 esto es $12!\binom{22}{10} = 12!\frac{22!}{10!12!} = \frac{22!}{10!} = 309744468633600$

6. Un comerciante vendió al primero de sus compradores la mitad de las naranjas más media naranja; al segundo, la mitad de las restantes más media; al tercero, la mitad de las que quedaron más media, etcétera. El comprador número 1546 adquirió la mitad de las naranjas que quedaban más media, agotando así la mercancía. ¿Cuántas naranjas tenía el comerciante?
Solución:
Claramente la solución es $\sum_{n=1}^{1546} 2^{n-1} = 2^{1546}-1 = 246815992516713737070603940457 29...$
936516219834858963854861923072400028235689900064774851430646859223548553715...
366716293169027711149862860373247688836996001532430901384595267842301654778...
770580566908983617268512773897968215849430948808840641302989615615776321673...
451589389258071580837624669367722390301273125925782436784291014968753357984...
026465288251349795932261756404969828008615032987142533619033618663475839692...
0666008274914316826463564186862578541572874587460337663. Eso porque el último comprador solamente puede comprar una naranja, pues la mitad de las restantes más media naranja sólo puede dar un número entero tal que se acaban las naranjas. Con un argumento similar el penúltimo comprador compra dos naranjas y así había tres naranjas al momento de comprar las suyas. Siguiendo así hasta el primer comprador,

se puede ver que se compra 2^{1545} naranjas. Así la totalidad de naranjas que tenía el comerciante era de $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{1545}$, lo cual es lo que se postuló al principio.

7. Si se forma un cubo C_3 de volumen $27u^3$ con cubitos de volumen $1u^3$, entonces sólo hay un cubito completamente escondido, o sea que ninguna cara es parte de las caras de C_3. Si se forma un cubo C_n de volumen n^3u^3 (con $n \geq 2$), ¿cuántos cubitos están completamente escondidos?
   Solución:
   Para encontrar la solución basta ver cuántos cubitos hay en la parte visible del cubo. Esto lo podemos hacer fácilmente separando por caras. Tanto la cara frontal como la trasera tienen n^2 cubitos, en la parte superior como inferior se tienen $n(n-2)$ cubitos que no hemos contado, mientras que en los lados tenemos $(n-2)^2$ cubitos no contados. Así el total de cubitos visibles en un cubo de n^3 es $2n^2+2n(n-2)+2(n-2)^2$ por lo que el total de cubitos escondidos es $n^3-2n^2-2n(n-2)-2(n-2)^2$ que con ciertas manipulaciones algebraicas es igual a $(n-2)^3$.

8. Dos jugadores, Arnulfo y Beatriz, participan en el siguiente juego: inicialmente hay una pila de 2014 rocas. Beatriz juega primero, escogiendo un divisor de 2014 y removiendo ese número de rocas de la pila. Entonces juega Arnulfo, escogiendo un divisor del número de rocas restantes y, como Beatriz, remueve ese número de rocas a la pila; así hasta remover todas las rocas entre ambos, siendo perdedor el que remueva la última roca en el juego. Probar que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describirla.
   Solución:
   Bajo el supuesto que se espera que se tome, que ambos jugadores sean astutos Beatriz le ganaría a Arnulfo, pues inicialmente puede quitar una piedra del montón, dejando un número impar de piedras en la pila. Así Arnulfo debería de quitar un número impar de piedras al montón restante, dejando un número par de piedras en tal. Si Beatriz repite su estrategia en cada turno que tenga, y Arnulfo no se da cuenta de que eventualmente perderá, eventualmente quedará una única piedra en el montón que Arnulfo tendrá que remover y así pierde el juego.
   Ahora, si Beatriz no es inteligente y comete algún error en su juego, Arnulfo aplicará la estrategia que debió aplicar Beatriz y ganará. Seamos felices. ☺

9. Cinco cubetas idénticas, de dos litros de capacidad, están en los vértices de un pentágono regular. Cenicienta y su malvada madrastra pasan por una serie de rondas, en las cuales: al principio de cada una, la madrastra toma un litro de agua de un río cercano y lo distribuye arbitrariamente, no necesariamente toda el agua se deposita en una sola cubeta, en cualquiera de las cubetas; entonces Cenicienta escoge un par de cubetas adyacentes, las vacía en el río y las regresa a su posición; luego sigue la siguiente ronda, repitiendo el patrón anteriormente descrito. El objetivo de la madrastra es que al menos una de las cubetas se desborde; el de Cenicienta es evitarlo. ¿Puede la madrastra desbordar una cubeta?

Solución:
La repuesta es no. Para justificar la aseveración llamemos a las cubetas B_0, B_1, B_2, B_3, y B_4, en donde B_k es adyacente tanto a B_{k-1} como a B_{k+1} ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) y todos los índices los tomamos módulo 5. Cenicienta logra que las siguientes tres condiciones se cumplan al principio de cada ronda:
(1) Dos cubetas adyacentes (digamos B_1 y B_2) están vacías.
(2) Las dos cubetas que se escuentran a lado de las cubetas adyacentes (B_0 y B_3) contienen en total a lo más un litro de agua entre las dos.
(3) La cubeta restante (en el ejemplo B_4) tiene a lo más un litro de agua.
Las tres condiciones se cumplen al inicio de la primera ronda cuando todas las cubetas están vacías.
Asumimos que Cenicienta logra mantener las condiciones hasta el inicio de la ronda r ($r \geq 1$). Denotemos por x_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) el contenido de la cubeta B_k al principio de este turno y y_k al contenido correspondiente luego de que la madrastra haya hecho sus movimientos.
Por las condiciones podemos asumir que $x_1 = x_2 = 0$, $x_0 + x_3 \leq 0$ y $x_4 \leq 1$. Así, como la madrastra añade un litro de agua concluimos que $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$. De lo anterior se tiene que $y_0 + y_2 \leq 1$ y $y_1 + y_3 \leq 1$, la última desigualdad es la que usaremos por razones de simetría. Con esto Cenicienta vacía las cubetas B_0 y B_4.
Al inicio de la siguiente ronda las cubetas B_0 y B_4 están vacías (se cumple la condición (1)); dado que $y_1 + y_3 \leq 1$ se cumple la condición (2) y como $x_2 = 0$ tenemos que $y_2 \leq 1$, cumpliendo la condición (3).
Luego, Cenicienta ha logrado mantener las tres condiciones al principio de la ronda $r+1$. Por inducción logra mantener las condiciones al principio de cada ronda; en particular mantiene cada cubeta con un contenido menor o igual a un litro de agua. Por lo tanto ninguna cubeta de desbordará.

10. Una esfera de radio 1 es internamente tangente a los cuatro lados de un tetraedro regular. Encontrar el volumen del tetraedro.
Solución:
El centro de la esfera está en el centroide del tetraedro, que se localiza a $\frac{1}{4}$ del camino de la distancia de una cara al vértice opuesto. Así el tetraedro tiene una altura de 4. Si su longitud de arista llamada s, entonces la altura de una cara es $s\frac{\sqrt{3}}{2}$ y la distancia del centroide de una cara a un vértice es $\frac{2}{3}$ de eso, que es $\frac{\sqrt{3}}{3}s$. Así la arista y la altura del tetraedro, con un segemento de la altura de uno de los triángulos que forman la cara (yendo del vértice al centroide de tal triángulo) como la hipotenusa de un triángulo rectángulo i.e. $\frac{1}{3}s^2 + 16 = s^2 \implies s^2 = 24$ y el área de una cara es $6\sqrt{3}$, pues el área de una de las caras está dado por $\frac{1}{2}s\frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. El volumen es $\frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$