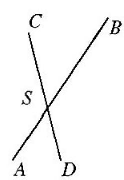
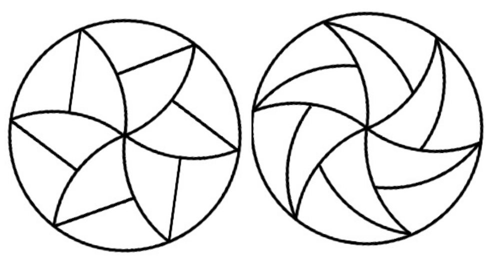
Zona Olímpica: Soluciones

1. (a) Como todas las distancias son diferentes entre sí, existen 2 *zombies*, A y B, que la minimizan. Estos 2 *zombies* se dispararán el uno al otro. Si algún otro *zombie* le dispara a A o a B, entonces necesariamente habrá un sobreviviente pues A y B habrán recibido, en conjunto, 3 balas. Si no, entonces podemos ignorar tanto a A como a B. De esta manera, nos hemos quedado con el mismo problema reemplazando n por $n-1$. Repitiendo el argumento, o encontramos una pareja de *zombies* que recibe 3 disparos o si no, llegamos finalmente a un caso en el que sólo hay 3 *zombies*. Para este útlimo caso ($n = 1$), el resultado es obvio.

   (b) Supongamos que las trayectorias de dos balas se cruzan, con A disparando a B y C disparando a D (ver la figura de abajo). Entonces $|AB| < |AD|$ y $|CD| < |CB|$ implican que $|AB|+|CD| < |AD|+|CB|$. Por otro lado, por la desigualdad del triángulo se tiene que $|AS| + |SD| > |AD|$ y $|BS| + |SC| > |BC| \Rightarrow |AB| + |CD| > |AD| + |BC|$, lo cual es una contradicción.



2. Sí:



3. $(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 + 2ab - 4ab + b^2 \geq 0 \iff (a+b)^2 \geq 4ab \iff \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. De esta última desigualdad podemos concluir que la suma S de los inversos de los números escritos en el pizarrón no va en aumento. Si inicialmente se escriben n unos, empezamos con $S = n$. Por lo tanto, al final tenemos que $S \leq n$. Y asi, para el último número que queda escrito, $\frac{1}{S}$, se tiene que $\frac{1}{S} \geq \frac{1}{n}$.

4. Si a^2+b+c es un cuadrado perfecto entonces se cumple que $a^2 \leq (a+1)^2 \leq a^2+b+c$, de donde obtenemos que $b+c \geq 2a+1$. Análogamente, si b^2+c+a y c^2+a+b son cuadrados perfectos, entonces se tiene que $c+a \geq 2b+1$ y $a+b \geq 2c+1$. Sumando estas tres desigualdades llegamos a que $0 \geq 3$, lo cual es claramente imposible.

5. Para $x, y \in \mathbb{Z}$, entendemos el segmento $[x, y]$ como el conjunto de todos los enteros t tales que $x \leq t \leq y$. La *longitud* de este segemento es $y-x$.
   Si para cada pareja de enteros positivos x, y que comparten el mismo color se cumple que $f(x)/x = f(y)/y$ enonces $a = max\{f(r)/r, f(b)/b\}$ funciona, en donde r y b son números rojos y azules arbitrarios, respectivamente. Por lo tanto, podemos suponer que existen dos números rojos x, y tales que $f(x)/x \neq f(y)/y$.
   Sea $m = xy$, afirmamos que cada segmento de longitud m contiene un número azul. En efecto, supongamos que todos los números en el segmento $[k, k+m]$ son rojos, entonces:

$$f(k+m) = f(k+xy) = f(k+x(y-1)) + f(x) = \cdots = f(k) + yf(x),$$

$$f(k+m) = f(k+xy) = f(k+(x-1)y) + f(y) = \cdots = f(k) + xf(y),$$

   por lo que $yf(x) = xf(y)$, una contradicción. Ahora consideremos dos casos.

   Caso 1. Supongamos que existe un segmento $[k, k+m]$ de longitud m que contiene únicamente números azules. Sea $D = max\{f(k), \ldots, f(k+m)\}$. Probaremos que $f(z) - f(z-1) \leq D$ para cualquier $z > k$, de donde se sigue la conclusión. Consideremos el número azul más grande b_1 que no excede z, entonces $z - b_1 \leq m$. Y también tomemos algún número azul b_2 en el segmento $[b_1+k, b_1+k+m]$, de tal forma que $b_2 > z$. Escribimos $f(b_2) = f(b_1) + f(b_2 - b_1) \leq f(b_1) + D$ para deducir que $f(z+1) - f(z) \leq f(b_2 - b_1) \leq D$, como queríamos.

   Caso 2. Cada segmento de longitud m contiene números de ambos colores. Fijemos cualquier número rojo $R \geq 2m$ tal que $R+1$ es azul y sea $D = max\{f(R), f(R+1)\}$. Afirmamos que $f(z+1) - f(z) \leq D$ para cualquier $z > 2m$. Consideremos el mayor número rojo r que no excede z y el mayor número azul b más pequeño que r. Se sigue que $0 < z - b = (z-r) + (r-b) \leq 2m$, y que $b+1$ es rojo. Sea $t = b+R+1$; entonces $t > z$. Si t es azul, entonces $f(t) = f(b) + f(R+1) \leq f(b) + D$ y $f(z+1) - f(z) \leq f(t) - f(b) \leq D$. En otro caso, $f(t) = f(b+a) + f(R) \leq f(b+1) + D$. Por lo tanto, $f(z+1) - f(z) \leq f(t) - f(b+1) \leq D$, tal como se afirmó.

6. En el arreglo inicial, numeremos todas las fichas en el sentido de las manecillas del reloj. De la misma manera, numeremos los vértices del *2n-ágono*. Consideremos tres fichas $i < j < k$ cualesquiera. En cada momento, su orden cíclico puede ser i, j, k o i, k, j, contados en el sentido de las manecillas del reloj. Este orden cambia justo cuando dos de estas tres fichas han sido intercambiadas. Por lo tanto, el orden es revertido 3 veces y en el arreglo final, la ficha k queda en el arco que va de la ficha i a la j en el sentido de las manceillas del reloj. Asi, al final, la ficha $i+1$ está justo a la derecha (en el sentido

de las manecillas del reloj) de la ficha i, para toda $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Por lo tanto, las fichas en el arreglo final están numeradas sucesivamente en orden circular en el sentido de las menceillas del reloj.
Esto siginifica que el arreglo final de las fichas puede obetenerse del inicial por medio de un reflejo a través de una línea ℓ.

Notemos que cada ficha estuvo involucrada en $2n-1$ intercambios, por lo que sus vértices inicial y final tienen distinta paridad. Por lo tanto, ℓ pasa a través de los puntos medios de dos lados opuestos del *2n-ágono*. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que éstos son los lados a y b conectando $2n$ con 1 y n con $n+1$, respectivamente. Durante el proceso, cada ficha x ha cruzado ℓ al menos una vez, lo cual quiere decir que uno de sus intercambios se hizo en la arista a o en la arista b. Supongamos que dos de sus intercambios se hicieron en a y en b. Supongamos también que el de a se realizó antes y que $x \leq n$. Entonces, el total de movimientos de la ficha x consistió al menos de: (i) moverse del vértice x al a y cruzar ℓ a lo largo de a; (ii) moverse de a a b y cruzar ℓ a lo largo de b; (iii) ir al vértice $2n+1-x$. Lo anterior requiere de al menos $x + n + (n - x)$ intercambios, lo cual es imposible.
Por lo tanto, cada ficha tuvo un intercambio en exactamente una de las aristas a o b.

Por último, demostraremos que o cada ficha fue intercambiada en a o cada ficha fue intercambiada en b (por lo que la otra arista nunca fue usada, como queremos). Por reducción al absurdo, supongamos que hubo intercambios tanto en a como en b. Consideremos el primero de estos intercambios y sean x, y las fichas que fueron movidas en el sentido de las manecillas del reloj durante estos intercambios y que cruzaron ℓ en a y b, respectivamente. Por lo que se dijo en el párrafo anterior, $x \neq y$. Por lo tanto, las fichas x, y inicialmente estaban em lados opuestos de ℓ.
Ahora consideremos el intercambio de las fichas x, y; hubo exactamente un intercambio como tal y suponemos que se hizo en el mismo lado de ℓ que el vértice y. Por lo tanto, este intercambio se hizo después de que x cruzara a. A partir de este punto, x está en el arco que va de y a b (en el sentido de las manecillas del reloj) y no hay manera de que salga de este arco. Pero esto es imposible, pues y debería "cruzar" b después de este momento. Lo cualo es una contradicción.

7. Resolvamos primero un problema más sencillo, el cual nos servirá más adelante: ¿En cuántas regiones dividen a la superficie de una esfera, n círculos si no hay tres que se intersecten?
Solución: Sea $f(n)$ el número que buscamos. Podemos ver directamente que $f(1) = 2, f(2) = 4$. Haremos el caso general de manera inductiva. Supongamos que ya hemos construido n círculos. Al añadir el $(n+1)$-ésimo, éste intersecta a los otros círculos en $2n$ puntos. Cada uno de los $2n$ arcos determinados por esos puntos divide alguna región en dos. Esto produce la relación de recurrencia $f(n+1) = f(n) + 2n$. Iterando, obtenemos:
$$f(n) = 2 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1) = n^2 - n + 2.$$

Ahora, para el problema que se plantea, trataremos de encontrar también una fórmula recursiva $F(n)$ para el número de regiones. Pero esta vez, contar el número de regiones añadidas por una nueva esfera no es tan fácil. Usemos el resultado anterior. Las primeras n esferas determinan en la $(n+1)$-ésima exactamente n^2-n+2 regiones. Esto es porque las condiciones de la pregunta determinan en la útlima esfera una configuración de círulos en la que cualesquiera 2, pero no 3, se intersectan. Y esta fue la única condición que usamos en el problema anterior. Cada una de las n^2-n+2 regiones esféricas divide alguna región del espacio en dos partes. Esto nos permite escribir la siguiente fórmula recursiva:

$$F(n+1) = F(n) + n^2 - n + 2, F(1) = 2.$$

Iterando, obtenemos:

$$F(n) = 2 + 4 + 8 + \cdots + [(n-1)^2 - (n-1) + 2] = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 - k + 2) = \frac{n^3 - 3n^2 + 8n}{3}.$$

8. Argumentando por contradicción, supongamos que existe una N tal que $1 + a_n \leq a_{n-1}2^{1/n}$ para $n \geq N$. Multipliquemos ambos lados por $b_n = 2^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$ para obtener

$$b_n + A_n \leq A_{n-1},$$

donde $A_n = b_n a_n$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} b_N &\leq A_{N-1} - A_N \\ b_{N+1} &\leq A_N - A_{N+1} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ b_n &\leq A_{n-1} - A_n, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\sum_{j=N}^{n} b_j \leq A_{N-1} - A_n \leq A_{N-1}$$

pues las a_j son positivas.
Debemos mostrar que

$$\sum_{n \geq N} b_n$$

diverge. Para ver esto, notemos que como $1/x$ es monótona decreciente, de una simple comparación de áreas obtenemos que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} = logn,$$

para cualquier entero positivo n. Por lo tanto,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n \frac{dx}{x}=1+logn,$$

y

$$b_n>2^{-1-logn}=\frac{1}{2}n^{-log2}>\frac{1}{2n}.$$

Como la serie armónica diverge, $\sum_{n\geq N} b_n$ diverge también.

9. Sea G el conjunto de niñas en la olimpiada y B el conjunto de niños. Sean P el conjunto de problemas, $P(g)$ el conjunto de problemas resueltos por $g\in G$ y $P(b)$ el conjunto de problemas resueltos por $b\in B$. Por último, $G(p)$ es el conjunto de niñas que resolvieron $p\in P$ y $B(p)$ es el conjunto de niños que resolvieron p. Así, tenemos que para toda $g\in G$ y todo $b\in B$,

$$(i)|P(g)|\leq 6, |P(b)|\leq 6$$

$$(ii)P(g)\cap P(b)\neq\emptyset.$$

Supongamos que para toda $p\in P$, ó $|G(p)|\leq 2$ ó $|B(p)|\leq 2$. Para cada $p\in P$, coloreamos p de rojo si $|G(p)|\leq 2$, y de negro en cualquier otro caso. De esta manera, si p es rojo entonces $|G(p)|\leq 2$ y si p es negro entonces $|B(p)|\leq 2$. Consideremos un tablero de ajedrez con 21 filas, cada una representando una de las niñas; y 21 columnas, cada una representando a uno de los niños. Para cada $g\in G$ y $b\in B$, coloreamos el cuadrado correspondiente a (g,b) como sigue: escogemos $p\in P(g)\cap P(b)$ y le asignamos el color de p a ese cuadrito. (Por (ii), siempre existe dicha p). Por el principio de las casillas, uno de los dos colores es asignado a al menos $\lceil 441/2\rceil=221$ cuadraditos, y por lo tanto alguna de las filas tiene al menos $\lceil 221/21\rceil=11$ cuadrados negros o alguna de las columnas tiene al menos 11 cuadraditos rojos.
Supongamos que la fila correspondiente a $g\in G$ tiene al menos 11 cuadritos negros. Entonces para cada uno de los 11 cuadrados, el problema negro que fue escogido al momento de asignarle el color fue resuelto por a lo más 2 niños. Así, contamos con al menos $\lceil 11/2\rceil=6$ problemas distintos resueltos por g. Por (i), sabemos que g resuelve únicamente estos problemas. Pero entonces a lo más 12 niños resuelven un problema también resuelto por g, lo cual viola la condición (b) de la pregunta.
Exactamente de la misma manera, obtenemos una contradicción si suponemos que alguna columna tiene al menos 11 cuadrados rojos. Por lo tanto, existe $p\in P$ que satisface $|G(p)|\geq 3$ y $|B(p)|\geq 3$.

10. Se argumentará por contradicción. Supongamos que $ab+cd$ es primo. Notemos que

$$ab+cd=(a+d)c+(b-c)a=m\cdot gcd(a+d,b-c)$$

para algún entero positivo m. Por hipótesis, ó $m=1$ ó gcd$(a+d,b-c)$=1. Consideremos ambas alternativas.

Caso 1. Si $m = 1$, entonces

$$gcd(a+d, b-c) = ab+cd > ab+cd-(a-b+c+d) = (a+d)(c-1)+(b-c)(a+1) \geq gcd(a+d, b-c),$$

lo cual es falso.

Caso 2. Si $\gcd(a + d, b - c)$=1. Sustituyendo $ac + bd = (a + d)b - (b - c)a$ por el lado izquiero de $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$, obtenemos

$$(a + d)(a - c - d) = (b - c)(b + c + d).$$

En vista de esto, existe un entero positivo k tal que

$$a - c - d = k(b - c),$$

$$b + c + d = k(a + d).$$

Sumando estas ecuaciones, obtenemos $a+b = k(a+b-c+d)$ y así, $k(c-d) = (k-1)(a+b)$. Recordemos que $a > b > c > d$. Si $k = 1$ entonces $c = d$, una contradicción. Si $k \geq 2$ entonces

$$2 \geq \frac{k}{k-1} = \frac{a+b}{c-d} > 2,$$

lo cual es una contradicción.

Como en ambos casos llegamos a una contradicción, se sigue que $ab + cd$ no es primo.