Zona Olímpica: Soluciones

1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Observemos que $a_4 + a_3 > a_1 + a_2$, de forma que $a_4 + a_3 \nmid a_1 + a_2$ y por lo tanto $a_4 + a_3 \nmid s_A$. Análogamente, $a_4 + a_2 > a_1 + a_3$ y por lo tanto $a_4 + a_2 \nmid s_A$. De esta manera, como podemos escoger (i, j) de 6 maneras y hemos visto que 2 no son posibles, tenemos que $n_A \leq 4$.

   Notemos que si $a_i + a_j | s_A \Rightarrow a_i + a_j | s_A - a_i - a_j$ ya que $a_i + a_j | -(a_i + a_j)$. Así, si $n_A = 4$, las siguientes condiciones se deben cumplir: $a_1 + a_2 \mid a_3 + a_4$, $a_1 + a_3 \mid a_2 + a_4$, $a_1 + a_4 \mid a_2 + a_3$ y $a_2 + a_3 \mid a_1 + a_4$. Sean $a_1 = a, a_2 = a + x, a_3 = a + x + y, a_4 = a + x + y + z$, con $x, y, z \in \mathbb{N}$. La primera de las condiciones nos dice que $2a + x | 2a + 2x + 2y + z \Rightarrow 2a + x | 2(x + y)$. La segunda, $2a + x + y | 2a + 3x + y + z \Rightarrow 2a + x + y | x + z$. De la tercera y la cuarta, obtenemos que $2a + x + y + z = 2a + 2x + y \Rightarrow x = z$.

   Así, como $2a + x + y | 2x \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $k(2a + x + y) = 2x \Rightarrow k = 1$ pues de lo contrario, es decir $k \geq 2$, se tendría que $k(2a + x + y) > 2x$. Por lo tanto, tenemos que $2a + y = x$. Ahora, $2a + x = 4a + y$, y $2(x + y) = 2x + 2y = 4a + 2y + 2y = 4a + y + 3y$. Como $2a + x | 2(x + y) \Rightarrow 4a + y \mid 4a + y + 3y \Rightarrow 4a + y \mid 3y \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m(4a + y) = 3y$, entonces $m = 1$ ó $m = 2$, pues si $m \geq 3 \Rightarrow m(4a + y) \geq 3y$. Si $m = 1$ entonces las soluciones son $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, 7a, 5a, 11a)$ y si $m = 2$ las soluciones son $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, 11a, 19a, 29a)$.

2. La demostración se hará por inducción sobre k.

   Si $k = 1$ entonces $m_1 = n$ funciona,

$$1 + \frac{2^1 - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

   Supongamos que se cumple para $k = i$, en seguida lo probaremos para $k = i + 1$.

   Si n es impar, esto es, si $n = 2a - 1$ para alguna $a \in \mathbb{N}$ entonces $m_{i+1} = 2a - 1$ funciona:

$$\frac{1 + \frac{2^{i+1}-1}{n}}{1 + \frac{1}{2a-1}} = \frac{\frac{n+2^{i+1}-1}{n}}{\frac{2a-1+1}{2a-1}} = \frac{n + 2^{i+1} - 1}{2a - 1 + 1} = \frac{2a - 1 + 2^{i+1} - 1}{2a}$$

$$= \frac{2a - 2 + 2^{i+1}}{2a} = 1 - \frac{2^{i+1} - 2}{2a} = 1 - \frac{2^i - 1}{a},$$

   aplicando la hipótesis de inducción sobre este último término de la igualdad, tenemos que

$$1 - \frac{2^i - 1}{a} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{m_i}\right),$$

así, llegamos a que

$$1+\frac{2^{i+1}-1}{n}=\left(1-\frac{2^i-1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{2a-1}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{m_i}\right)\left(1+\frac{1}{2a-1}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{m_i}\right)\left(1+\frac{1}{m_{i+1}}\right),$$

como queríamos.

Si n es par, esto es, si $n=2a$ para alguna $a\in\mathbb{N}$ entonces procedemos de manera análoga, esta vez poniendo $m_{i+1}=2a+2^{i+1}-2$.

3. De la primer condición del problema obtenemos que $f(1)f(x)\geq f(1x)=f(x)\Rightarrow f(1)\geq 1$.

   De la segunda condición, se deduce por inducción que $f(nx)\geq nf(x)$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y $x\in\mathbb{Q}_{>0}$. Además, de (i), tenemos que $f(n)f(x)\geq f(nx)\Rightarrow f(n)f(x)\geq f(nx)\geq nf(x)\Rightarrow f(n)\geq n$ para toda $n\in\mathbb{N}$.

   Supongamos que existe $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_{>0}$ (esto es, $p,q\in\mathbb{N}$) tal que $f(\frac{p}{q})\leq 0$. Como $q\in\mathbb{N}\Rightarrow f(q)\geq q>0$, así, aplicando (i) se tiene que $0\geq f(\frac{p}{q})f(q)\geq f(\frac{p}{q}q)=f(p)\geq p$. Lo cual es una contradicción pues $p\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, $f(x)>0$ para toda $x\in\mathbb{Q}_{>0}$. Como $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ y además $f(y)\geq 0\Rightarrow f(x+y)\geq f(x)$. Al ser $x,y\in\mathbb{Q}_{>0}\Rightarrow x+y>x$, Por lo tanto, lo anterior implica que f es una función creciente.

   Como $f(a)=a$, entonces $a^2=f(a)f(a)\geq f(a^2)$. Aplicando inducción, se tiene que para toda $k\in\mathbb{N}$, $f(a^k)\leq a^k$. Además, por (ii), claramente $f(na)\geq nf(a)=na$. Supongamos que para alguna $m\in\mathbb{N}$ sucede que $f(ma)=ma+\beta$ con $\beta>0$. Si N es un entero mayor que $\frac{a}{\beta}$ entonces cocluimos que $f(Nma)\geq Nf(ma)\geq Nma+N\beta>Nma+a$. Existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\lfloor a^k\rfloor>Nm$. La condición (ii) implica que $a^{k+1}\geq f\left(a^{k+1}a\right)\geq f\left(\lfloor a^k\rfloor a\right)\geq f\left(\left(\lfloor a^k\rfloor-Nm\right)a\right)+f\left(Nma\right)\ >\left(\lfloor a^k\rfloor-Nm\right)a+Nma+a=\lfloor a^k\rfloor a+a$. Lo anterior es una contradicción, por lo tanto $f(ma)=ma$ para toda $m\in\mathbb{N}$.

   Existen enteros p y q tales que $a=\frac{p}{q}$. De aquí que, $f(d\frac{p}{q})=d\frac{p}{q}$ para toda $d\in\mathbb{N}$, poniendo $d=kq$ tenemos que $f(kp)=kp$ para toda $k\in\mathbb{N}$. Así, de (ii) se obtiene que $kp=f(kp)\geq f(k)+(p-1)f(k)\geq 2f(k)+(p-2)f(k)\geq\cdots\geq pf(k)$, por lo tanto $f(k)\leq k$. Además, habíamos llegado a que $f(k)\geq k$, de donde se concluye que $f(k)=k$ para toda $k\in\mathbb{N}$.

   Supongamos que para alguna $x\in\mathbb{Q}_{>0}$ existe $\alpha>0$ tal que $f(x)-x=\alpha$. Sea N un entero tal que $Nx\in\mathbb{N}$. Entonces, $Nx=f(Nx)\geq Nf(x)=N(x+\alpha)=Nx+N\alpha$. Lo cual es un a contradicción. Por lo tanto, $f(x)=x$ para toda $x\in\mathbb{Q}_{>0}$.

4. Usaremos c_{ij} para referirnos a la casilla en en la i-ésima fila y j-ésima columna.

   Observación: Supongamos que la fila i se cambió a veces y la fila j se cambió b veces. Entonces c_{ij} permanece prendido si y sólo si $a+b$ es impar. Esto nos permite garantizar que el orden en que realizamos las operaciones no importa y simplemente hablar de si "se cambió" o "no se cambió" una fila o columna.

   La solución se hará por contrapositiva. Supongamos que a lo más hay $n-1$ focos prendidos. Entonces hay un renglón i y una columna j tales que ninguno de sus cuadritos está encendido. Supongamos que se cambió el renglón i, entonces también se cambió la columna j para que el cuadrito c_{ij} esté apagado. Tomemos cualquier otro cuadrito c_{kl} del tablero. Como el cuadrito c_{kj} está apagado, entonces la fila k se cambió. Asimismo, como el cuadrito c_{il} está apagado, entonces la columna l se cambió. Así, c_{kl} está apagado. De modo que todos los cuadritos del tablero están apagados. Llegamos a la misma conclusión si no se cambió el renglón i.

   Esto nos dice que si a lo más hay $n-1$ focos prendidos, entonces ninguno está prendido, lo cual es equivalente a lo que queríamos demostrar.

5. Lo primero que probaremos es que $p=3$. Esto se debe a que $p, p+2^k$ y $p+2^k+2$ son todos distintos módulo 3. De modo que si p no es 3, entonces no es 0 módulo 3 y entonces alguno de los otros dos números es múltiplo de 3. Pero además observamos que $p+2^k$ es mayor o igual a 4 pues p es primo y k es positivo. De esta forma, si p no es 3, alguno de los últimos dos números no es primo. Nuestros números se cambian a 3, 5, $a=3+2^k$ y $b=5+2^k$. Notemos que las potencias de 2 módulo 3 son 2 y 1, por lo que para que b sea primo necesitamos que k sea impar.

   Las potencias de 2 módulo 5 son $1, 2, 4, 3$. Como ya eliminamos el caso $k=2$ entonces el tercer número es mayor a 5 y por tanto debemos evitar k de la forma $4r+1$ (de lo contrario, a sería múltiplo de 5). Como sabemos que k es impar, entonces debe ser de la forma $4k+3$. Guardemos esta observación para más adelante.

   Pasando ahora a módulo 7, tenemos que las potencias de 2 son $1, 2, 4$. Asi, para evitar múltiplos de 7 en a y b necesitamos respectivamente que k no sea de la forma $3r+1$ ó $3r+2$. Esro solo deja el caso en el que k es de la forma $3r$. Por la observación del párrafo anterior, concluimos que k es de la forma $12r+3$.

   Concluimos el problema analizando lo que sucede módulo 13. Dada la forma de k, 2^k siempre es congruente con 8 módulo 13. De modo que b siempre es múltiplo de 13. Como es primo, debe ser 13, de donde $k=3$ y podemos verificar que $a=11$ también es primo. De modo que la única solución es $(3, 3)$.

6. Supongamos que la suma de las longitudes de las cuerdas es mayor o igual a $k\pi$. Entonces la suma de las longitudes de los arcos subtendidos por estas cuerdas es mayor que $k\pi$. Si añadimos a estos arcos sus reflexiones respecto al centro del círculo, entonces la suma de las longitudes de todos los arcos será mayor que $2k\pi$. Por principio de las casillas, existe un punto que es cubierto por al menos $k+1$ arcos. El diámetro que pasa por este

punto intersecta al menos $k+1$ cuerdas, lo cual contradice la hipótesis del problema. Por lo tanto, la suma de las longitudes de las cuerdas es menor que $k\pi$.

7. Para este problema, primero demostraremos lo siguiente: sean a, b, x, y números reales, con $x, y > 0$, entonces

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Prueba. Claramente podemos expresar la desigualdad anterior como

$$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy,$$

esto se puede simplificar hasta llegar a $(ay-bx)^2 \geq 0$, lo cual evidentemente se cumple.

Asi, un argumento inductivo muestra que

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ con $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.

La desigualdad anterior se conoce como “desigualdad de Cauchy-Schwarz en forma de Engel” o simplemente, “desigualdad útil”.

Regresando al problema y aplicando esta desigualdad, tenemos que

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} + \frac{1^2}{c} \geq \frac{(1+1+1)^2}{a+b+c} = \frac{9}{a+b+c},$$

de donde $a+b+c \geq 9$. Aplicando este resultado y la desigualdad útil, se obtiene lo siguiente

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{1+1+1} = \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{(a+b+c)(a+b+c)}{3} \geq$$

$$\frac{9(a+b+c)}{3} = 3(a+b+c) = 2a+2b+2c+a+b+c \geq 2a+2b+2c+9,$$

como queríamos demostrar.

8. Supongamos que existe una función de coloración $f : \mathbb{Z} \to \{R, B, G, Y\}$, (R:rojo, B: azul, G:verde, Y:amarillo), con la propiedad de que para cualquier entero a

$$f\{a, a+x, a+y, a+x+y\} = \{R, B, G, Y\}.$$

En particular, coloreando el plano *lattice* siguiendo la regla

$$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{R, B, G, Y\}, g(i,j) = f(ix+jy),$$

se obtiene que los vértices de cualquier cuadrado unitario son todos de distinto color.

Afirmación 1. Si existe una columna $i \times \mathbb{Z}$ tal que $g|i \times \mathbb{Z}$ no sea periódico con periodicidad 2, entonces existe una fila $\mathbb{Z} \times j$ tal que $g|\mathbb{Z} \times j$ no es periódico con periodicidad 2.

Prueba. Si $g|i \times \mathbb{Z}$ no tiene periodicidad, entonces podemos encontrar la configuración $\begin{matrix} Y \\ B \\ R \end{matrix}$; usando los cuadrados unitarios adyacentes, obtenemos $\begin{matrix} RYR \\ GBG \\ YRY \end{matrix}$ y también $\begin{matrix} YRYRY \\ BGBGB \\ RYRYR \end{matrix}$ y así sucesivamente. Así, hemos obtenido 3 líneas periódicas.

Afirmación 2. Si para un entero i, se tiene que $g_i = g|\mathbb{Z} \times i$ tiene periodicidad 2, entonces para toda $j \in \mathbb{Z}, g_j = g|\mathbb{Z} \times j$ tiene periodicidad 2. Los valores de g_i son los valores de g_j si $i \equiv j \pmod 2$ y los otros valores si $i \not\equiv j \pmod 2$.

Prueba. Aplicando la regla del cuadrado a la línea $\ldots RBRBRB \ldots$ obtenemos $\begin{matrix} \ldots YGYGY \ldots \\ \ldots RBRBR \ldots \end{matrix}$

y después $\begin{matrix} \ldots RBRBR \ldots \\ \ldots YGYGY \ldots \\ \ldots RBRBR \ldots \end{matrix}$ ó $\begin{matrix} \ldots BRBRB \ldots \\ \ldots YGYGY \ldots \\ \ldots RBRBR \ldots \end{matrix}$.

Un argumento similar se sostiene para las filas por debajo de la línea $\mathbb{Z} \times i$.

Cambiando "filas" por "columnas", se obtienen afirmaciones análogas. Entonces podemos suponer que las filas tienen periodicidad 2 y $g(0,0) = R$, $g(1,0) = B$. Por lo tanto, $g(y,0) = B$, pues y es impar. La fila $\mathbb{Z} \times \{x\}$ es impar también; entonces $g(\mathbb{Z} \times \{x\}) = \{Y, G\}$. De $g(y,0) = f(xy) = g(0,x)$ se obtiene una contradicción.

Nota: El mismo resultado es cierto si $x = 2^k(2p+1), 2^k(2q+1)$; solo basta con tomar $g(i,y) = f(\frac{ix+jy}{2^k})$.