# Índice

## Editorial



## Ludoteca espiriforme



## Epístola de la ciencia



## Reloj o perfecta sincronía



## Un paseo por el quéhacer

# Editorial

Finalmente la espera ha llegado su fin. Estamos de nuevo en las manos de nuestros lectores, esperando cumplir con los objetivos planteados. El trabajo ha sido difícil pero el amor por este proyecto lo ha sacado adelante. Seguiremos trabajando para mantener este espacio abierto para todos aquellos interesandos en las matemáticas.

## *Agradecemos especialmente...*

A Ricardo Gallardo por su gran trabajo como director de Laberintos e Infinitos.

A Daniel García Ulloa por su labor en el departamento de edición y como secretario de esta revista.

Al Consejo académico por su gran apoyo.

A los autores de los artículos por su paciencia y por creer en nosotros.

**http://laberintos.itam.mx**
**laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx**
**En la portada:** *fractal de Carlos Franco*

Se terminó de imprimir en Otoño de 2006, en la imprenta:
*I. M. Impresores S. A. de C. V.*
*Andrés Molina Enríquez 825, Col. San Andrés Tepetilco, Iztapalapa, C. P. 09440.*
El tiraje fue de 2000 ejemplares.


4783527350981426893456372829648567585959733420928634530394857612325347756503937612345678909876543213425643993847565757511980964554685959

# Georg Cantor, ese corrupto de la juventud.

Guillermo Grabinsky Steider
Profesor del ITAM

## INTRODUCCIÓN

A diferencia de otras áreas del conocimiento matemático que son el resultado de un largo proceso de investigación y de la contribución de un grupo numeroso de personas, la Teoría de Conjuntos y la Aritmética Transfinita es la creación genial de una sola persona y constituye sin duda un caso único por la gran diversidad de opiniones y polémicas que suscitó en su tiempo. Un matemático tan notable como H. Poincaré (1854-1912) llamó a la Teoría de Números Transfinitos una "enfermedad" de las que las Matemáticas se curarían algún día. L. Kronecker (1823-1891) un matemático alemán con gran influencia, llegó al punto de oponerse a la publicación de tales ideas y recurrió al insulto personal. H. A. Schwarz (1843-1921) compañero universitario y amigo, rompió la amistad disgustado por la dirección que tomaban las investigaciones de su colega.

Por otro lado, R. Dedekind (1831-1916) otro gran matemático alemán, entabló una productiva relación amistosa y epistolar de la que ambos se beneficiaron. Mientras que D. Hilbert (1862-1943) describió a la teoría como el "producto más sublime del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad intelectual humana".

El receptor de tales agravios y elogios se llamó Georg Cantor.

## GEORG CANTOR (1845-1918) [1], [9]


*George Cantor*

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nace el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, hijo de Georg Waldemar Cantor, luterano devoto y de María Anna Böhm, católica proveniente de una familia de músicos notables. La salud del padre era precaria y en 1856 la familia se muda al sur de Alemania en busca de un clima más caluroso. Después de vivir en diversos lugares de Alemania, Cantor concluye su educación superior en la Universidad de Berlín en donde se doctora con una tesis sobre Teoría de los Números bajo la dirección de E. Kummer (1810-1893) en 1867.

En 1869 es aceptado como *privatdozent* (profesor asociado) en la Universidad de Halle en Alemania y es entonces que su interés se dirige hacia el Análisis. Es en Halle en donde su colega H. E. Heine (1821-1881) lo invita a estudiar el difícil problema de la unicidad de series trigonométricas del que Heine había resuelto un caso particular, relajando la hipótesis de convergencia uniforme. Cantor va por todo y considera el caso en que la convergencia es puntual fuera de ciertos conjuntos excepcionales los cuales intenta clasificar. Brevemente describiremos el problema y la solución de Cantor.

<u>EL PROBLEMA DE UNICIDAD</u> (1870-1872) [3], [6]

Supongamos que $a_0 + a_1\cos(x) + b_1 sen(x) + a_2\cos(2x) + b_2 sen(2x) + \ldots (*)$ es una serie trigonométrica que converge a cero a excepción de un conjunto de puntos P, entonces ¿Cómo debe de ser P para que se pueda concluir que todos los coeficientes $a_n$, $b_N$ son iguales a cero? A un conjunto P de esos le llama CONJUNTO DE UNICIDAD. De inmediato Cantor notó que era necesario construir una sólida teoría de los números reales y aquí empieza su gran aventura. Cantor llama a un punto x, un punto de ACUMULACIÓN de un conjunto P, si todo intervalo abierto que contiene a x, contiene también una infinidad de puntos de P, así por ejemplo: x = 0 es punto de acumulación de P = {1, ½, 1/3, … }. A la colección de puntos de acumulación de P la denota por $P^{(1)}$ y lo llama el conjunto DERIVADO de P. El segundo derivado de P, denotado $P^{(2)}$, es el resultado de derivar a $P^{(1)}$ una vez. De aquí en adelante el conjunto $P^{(n)}$ es el primer derivado de $P^{(n-1)}$. Si $P^{(n)}$ es vacío para alguna n, P se llama de PRIMERA ESPECIE (de lo contrario se llama de segunda especie). En estos términos el teorema de unicidad de Cantor dice así: "Si (*) converge puntualmente a cero a excepción de los puntos de un conjunto de primera especie, entonces todos los coeficientes son cero".

Todos los conjuntos de primera especie son numerables, no así el recíproco (por ejemplo si P $=\mathbb{Q}$, entonces $P^{(n)} = \Re$ para toda n por lo que es de segunda). Por otro lado todo subconjunto no-numerable es de segunda especie. El más célebre de ellos es el conjunto ternario clásico de Cantor C, inventado por él en 1883 con el exclusivo propósito de exhibir un conjunto denso en ninguna parte y de segunda especie(Ver: "¿En verdad existe algo así?,Laberintos e Infinitos #5). Habiendo definido la sucesión $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, …, $P^{(n)}$,… Cantor observa que $P^{(n)} \subseteq \ldots \subseteq P^{(2)} \subseteq P^{(1)}$ y define $P^{(\infty)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$ es en este punto donde Cantor de el paso decisivo y define $P^{(\infty+1)}$ como el primer derivado de $P^{(\infty)}$ y la puerta hacia la aritmética transfinita estaba abierta. Ya encarrerado se apuesta a definir la clase II de números transfinitos:

$$w, w+1, \ldots, w+n, \ldots, w+w, \ldots, w^m, \ldots, n_1 w^{m1} + \ldots + n_R w^{mR} + n_{R+1}, \ldots, w^w, \ldots$$

(Cantor reemplaza $\infty$ con w).

LIOUVILLE REDESCUBIERTO (1874) [7], [8]

Un número real se llama ALGEBRÁICO si es la raíz de una ecuación de la forma: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (**) donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números enteros. Un número real que no es algebráico se llama TRASCENDENTE.
J.Liouville(1809 - 1882) probó (en 1844) que todo intervalo (á, â) contiene una infinidad de números trascendentes. Un ejemplo de estos números es el famoso número de Liouville (1851) x=0.11000100000000000000000010… (el n-ésimo uno aparece en el lugar n!)Cantor procede así: dada una ecuación (**) define su ALTURA como el número natural $|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| + n - 1$. Por ejemplo hay sólo una ecuación de altura 1, a saber, $x = 0$, cuatro ecuaciones de altura 2, $2x = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$ y $x^2 = 0$. Para cada m hay un número finito de ecuaciones de altura m y cada una de ellas contribuye con un número finito de raíces reales por lo que ordenando convenientemente todas las raíces reales que resultan, éstas pueden escribirse como una sucesión, lo que hoy diríamos así: el conjunto de números algebráicos es numerable. Entonces la "gran mayoría" de números son en consecuencia ¡trascendentes!

En 1873, C. Hermite (1822 - 1901) prueba que ***e*** es trascendente y F. Von Lindeman (1852 - 1939), basado en el trabajo de Hermite, prueba en 1882 que ð es trascendente también, mostrando con ello la imposibilidad de "cuadrar el círculo" y poniendo fin al famoso problema griego. Kronecker felicitó calurosamente a Lindeman por tan hermoso resultado, pero enseguida le dijo que trabajó en balde ya que no tiene sentido estudiar tales problemas porque los números irracionales ¡no existen!

[á,â] NO ES NUMERABLE [7]

El primer resultado dice así:

TEOREMA (Cantor 1874)
Dada cualquier sucesión de números reales $w_1, w_2, \ldots$ y cualquier intervalo [á,â] es posible determinar un número ç en [á, â] que no pertenece a la sucesión.

Resulta interesante revisar el argumento original. Localizamos los primeros dos elementos de la sucesión que pertenecen al intervalo y llamamos $\alpha_1$ al menor y $\beta_1$ al mayor. A continuación consideramos los siguientes dos elementos de la sucesión que pertenecen a $[\alpha_1, \beta_1]$ y llamamos $\alpha_2$ al menor y $\beta_2$ al mayor. Continuando de esta manera generamos una cadena descendente de intervalos cerrados:
$[\alpha_n, \beta_n] \subseteq \ldots \subseteq [\alpha_2, \beta_2] \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, por lo que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$, $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n$ y $\alpha_n < \beta_m$ para cada n, m. Se nos presentan dos casos:

CASO 1

El procedimiento genera sólo un número finito de intervalos distintos, es decir, para alguna N, $\alpha_N = \alpha_{N+1} = \ldots$ y $\beta_N = \beta_{N+1} = \ldots$ así pues el último intervalo generado es $[\alpha_N, \beta_N]$ y cualquier $\eta$ en $(\alpha_N, \beta_N)$ funciona.

CASO 2

El procedimiento continúa indefinidamente. Sea $\alpha^{(\infty)} = \lim_{(n\to \text{infinito})} \alpha_n$ y $\beta^{(\infty)} = \lim_{n\to \text{infinito}} \beta_n$. es fácil probar que $\alpha^{(\infty)} \leq \beta^{(\infty)}$. Si $\alpha^{(\infty)} = \beta^{(\infty)}$ sea $\eta$ el valor común, entonces $\eta \neq w_n$ para cada n ya que $w_n$ no es elemento de $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$. Si $\alpha^{(\infty)} < \beta^{(\infty)}$ entonces tomamos cualquier $\eta$ en $(\alpha^{(\infty)}, \beta^{(\infty)})$.

## EQUIVALENCIA Y DIMENSIÓN.

El concepto de correspondencia biunívoca entre conjuntos, aparece de manera latente en 1874, se consolida en 1877 y se publica en 1878. Dos conjuntos A y B se llaman EQUIVALENTES si existe una biyección entre ellos, en cuyo caso se dice que tienen la misma POTENCIA. Si el conjunto es finito la noción de potencia corresponde al número de elementos del conjunto. Un conjunto finito no puede ser equivalente a una parte de él, no ocurre así con los conjuntos infinitos, ya Galileo (1564-1642) había notado la correspondencia entre $\{1,2,3,\ldots\}$ y $\{1^2,2^2,3^2,\ldots\}$.

*Dedekind*

En una carta de Cantor a Dedekind fechada el 5 de enero de 1874 le escribe: "¿Puede una superficie con su frontera incluida, digamos un cuadrado, ser referido a una recta, digamos un segmento de recta incluyendo sus extremos, de tal modo que a cada punto de la superficie le corresponda un punto sobre la recta y viceversa?. Responder tal pregunta podría ser un trabajo difícil a pesar de que la respuesta parece ser claramente NO y una prueba sería innecesaria".

*Cantor*

En 1877, Cantor logra establecer una correspondencia discontinua entre los puntos de un espacio p – dimensional y los del intervalo [0,1], sorprendido por sus propios hallazgos le escribe a Dedekind (29 de junio 1877) "lo veo, pero no lo creo". Este resultado tiene implicaciones profundas para la geometría y para la noción de dimensión. A pesar de la oposición de Kronecker, el trabajo se publicó en el Journal Crelle en 1878, a partir de entonces Cantor no daría otro artículo más para su publicación en el Crelle. Años más tarde, en 1890, G. Peano (1852-1932) le propinó otro duro golpe a la intuición cuando construyó una función CONTINUA y SUPRAYECTIVA de [0,1] en $[0,1]\times[0,1]$; un ejemplo de las llamadas curvas que rellenan espacios. La comunidad matemática alarmada, se vio forzada a revisar la noción de dimensión y no fue sino hasta 1911, que L.E.J. Brouwer (1881-1966) aclaró el punto.

## EL MÉTODO DIAGONAL.

El argumento más popular para probar la no-numerabilidad del intervalo (0,1) descansa en el llamado "método diagonal" de Cantor. Si (0,1) fuera numerable podría escribirse como sigue: $(0,1) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ahora consideremos la expansión decimal de cada uno de los $x_i$ y presentemos todos los dígitos en el siguiente arreglo infinito:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots \\
&\;\;\vdots \\
x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
$$

A continuación generamos un número real $y = 0.b_1b_2\ldots$ en (0,1) diferente de cada $x_n$, digamos del siguiente modo (entre otros): Sea $b_n = 1$, si $a_{nn} \neq 1$ y $b_n = 2$ siempre que $a_{nn} = 1$, entonces $y$ es un elemento de (0,1) pero no es elemento de $\{x_1, x_2, \ldots\}$. La prueba es simple y elegante, pero no fue así como Cantor demostró la no-numerabilidad de (0,1), de hecho jamás produjo para este fin una demostración basada en la expansión decimal de números reales [4]. El método diagonal introducido por Cantor apareció en 1891 en un contexto similar y por esto se le adjudica.

En 1883, Cantor escribe una obra fundamental, su GRUNDLAGEN y para entonces los números ordinales transfinitos habían ya adquirido su carácter definitivo de números.

En mayo de 1884 sufre el primero de varios colapsos nerviosos que habrían de aquejarlo el resto de su vida, los cuales serían, lamentablemente, cada vez más frecuentes y desgastantes, condición que quizá hoy en día, se habría diagnosticado como enfermedad maniaco-depresiva. A pesar de ello, Cantor continuó su trabajo innovador y entre 1895 y 1897 prueba que el número cardinal de un conjunto es menor que el de la clase de sus subconjuntos y es en esa época en donde adopta el aleph, primera letra del alfabeto hebreo, para designar sus nuevos cardinales transfinitos.

*Kronecker*

Hasta aquí un breve recuento de algunos de los primeros logros de aquél, que algún día su profesor Kronecker llamará: renegado, charlatán científico y corruptor de la juventud. [5]

En una próxima entrega continuará nuestra historia.

## BIBLIOGRAFIA.

[1] “Men of Mathematics” Eric Temple Bell. Capítulo “Paradise lost”. New York. Touchtone (1986).

[2] “Contribution to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers” G. Cantor, Dover Publications. New York (1955).

[3] “The Trigonometric Background to Georg Cantor Theory of Sets” Joseph W. Dauben, Arch.Hist.Ex.Sc (1970 – 1) pp. 181 – 216

[4] “Denumerability and Dimension: The Origin of Georg Cantor’s Theory of Sets” Joseph W. Dauben, Rete 2z (1974) pp. 105 – 134

[5] “Georg Cantor and the Battle for Transfinite Set Theory” Joseph W. Dauben, Journal of the ACMS.9th ACMS Conference procedings (1993)

[6] “Connection in Mathematical Analysis: The Case of Fourier Series” Enrique A. Gonzales-Velasco, American Mathematical Monthly Vol. 99 # 5 May 1992 pp. 427 – 441

[7] “Georg Cantor and Trascendental Numbers” Robert Gray, American Mathematical Monthly Vol. 101 # 9, Nov. 1994 pp. 819 – 832

[8] “Theory of Sets” E. Kamke Dover publications. New York (1950).

[9] http://www-groups.decs.st.ac.ur /~history/BiogIndex.html en donde se puede consultar la biografía de cada uno de los matemáticos considerados.

478352735098142689345637282964856758595

Laberintos e infinitos

# Laberintos e infinitos

Revista de divulgación matemática de los alumnos del ITAM

Atrévete

¡¡Escribe!!

Mándanos tus artículos, comentarios y preguntas a:

**laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx**

Visita nuestra página

http://laberintos.itam.mx/

# Los hermanos golosos

En una casa viven cuatro hermanos golosos, cada uno en una habitación, y también tienen un perro. En la cocina hay un bote de galletas, y como son tan tragones se pelean entre ellos. Pues a la hora del desayuno suele pasar que tras dar una galleta al perro no hay el mismo número de galletas para cada uno de ellos.

Preso de un ataque de glotonería el hermano mayor se levanta de madrugada, da una galleta al perro para que no ladre, se come la cuarta parte de las galletas que quedan y se acuesta tranquilo, pues sabe que han quedado galletas suficientes para el desayuno.

El segundo hermano se levanta después, da una galleta al perro y se come la cuarta parte de las que quedan y sabe que no será descubierto en el desayuno.

El tercer y cuarto hermano hacen lo mismo.

No satisfecho, el primer hermano se levanta de nuevo e intenta repetir el truco pero se da cuenta de que es imposible no ser descubierto.

Cuando amanece van a desayunar y como cada día, dan una galleta al perro y reparten las galletas en cuatro partes iguales.

¿Cuál es el número de galletas que había en el bote?

# Un problema para obtusos

Los astrónomos agrupan las estrellas en constelaciones uniéndolas por líneas imaginarias. Tal vez, la más sencilla sea la constelación formada por un trío de estrellas.

Consideremos la inmensa cantidad de constelaciones triangulares que se formarían tomando las estrellas del firmamento de tres en tres arbitrariamente. Si las clasificásemos en dos grupos: obtusángulas y acutángulas. ¿Qué podríamos afirmar respecto de la abundancia de cada grupo?

El sentido común tal vez nos indique que debería de haber más obtusángulas puesto que para ello basta que sea obtuso uno cualquiera de los tres ángulos, pero ¿en qué proporción?

# Los bomberos

El diagrama indica la ubicación de los 35 barrios de una ciudad. Los círculos son barrios y las líneas carreteras. La distancia entre barrios es 5 Km.
El intendente decide que ningún barrio debe estar a más de 5 Km. de un cuartel de bomberos.
¿Cual es la mínima cantidad de cuarteles necesarios?
Indique sus ubicaciones.

```
o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |
o--o--o--o--o
```

# Aficionados al teatro

Miguel y Nadia tienen planeado ir a una obra de teatro, pero no se conocen por lo que quedan de llegar al teatro y sentarse aleatoriamente.
¿Qué posibilidades tienen de sentarse juntos, uno al lado del otro, teniendo en cuenta que la platea del teatro tiene 30 filas y en cada fila hay 28 asientos?
Caso a) Suponemos que la platea no tiene ninguna división
Caso b) Suponemos que la platea está dividida en dos, derecha e izquierda, números pares e impares, por un pasillo central.