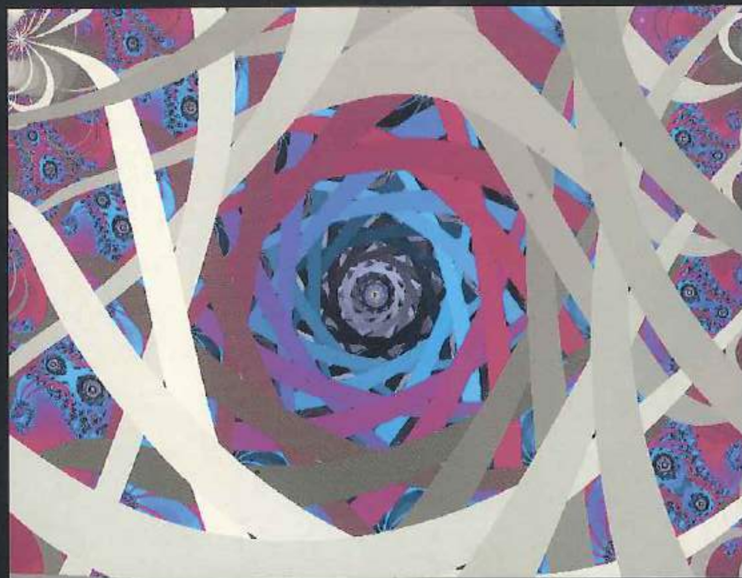
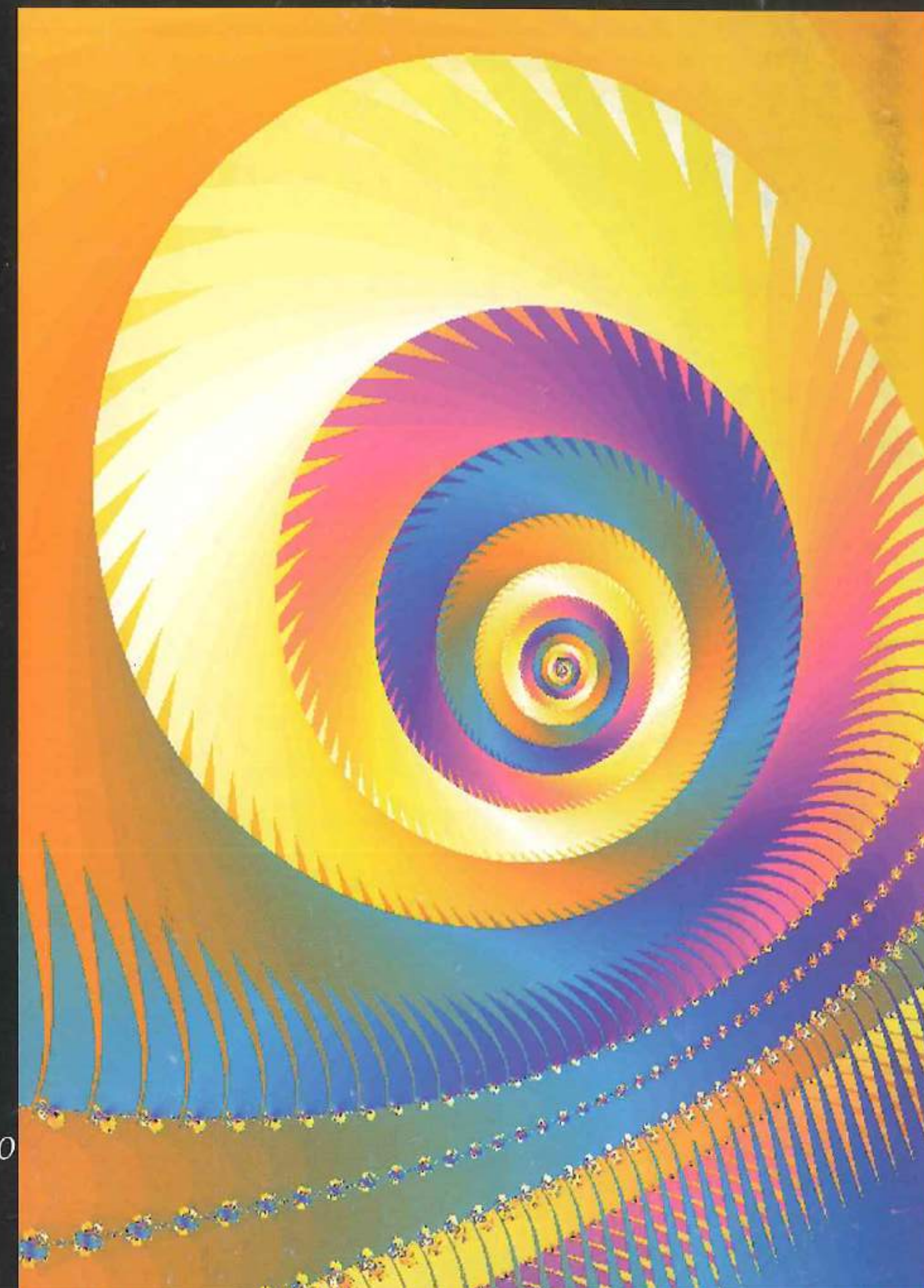


Jesús Ortega

Laberintos e infinitos



Número 10

Otoño
2004

Índice

Editorial

Editorial 2
Agradecimientos 2

Ludoteca espiriforme

Chiste 11
Movimiento circular 11
Moros y cristianos 23
El trielo 23
Producto de una serie 25
Ilusión Optica 25
Las cuatro pesas 43
Bolas de billar 43
El problema de las ocho reinas 48

Epístola de la ciencia

Cálculo en teoría de los números 3
Javier Alfaro Pastor

Sobre anillos, retículas y algunas relaciones entre ellos 12
Carlos José Signoret Poillon

La aplicación y algunos teoremas de adición para las funciones trigonométricas 39
Jorge Enrique Bauer León

Reloj o perfecta sincronía

Riesgo y los acuerdos de Basilea II 7
Patricia Saavedra Barrera

Relatividad especial 26
Daniel García Ulloa

La lógica formal y el psicoanálisis 33
Walter Beller

Hablando de créditos hipotecarios 44
Emma Cristina Conde Flores y Claudia Pavón Navarrete

Un paseo por el quéhacer

Congreso anual de la Sociedad Matemática Mexicana 47
Sociedad Matemática Mexicana

Reseña del 19 Foro Nacional de Estadística 47
Luis E. Nieto Barajas

Por el principio de inducción, si $x > 2$ y $n \geq 2$ entonces $x^n > nx$.

Ahora regresemos a nuestro problema: ¿Cuándo existen b y c números naturales con las propiedades pedidas en 1? Si $b > 2$, $y\, c \geq 3$, entonces $b^{c-1} > (c-1)b > 2(c-1) > c$ y no se da la igualdad $c = b^{c-1}$ por lo que la única posibilidad es $b = 2$ o $c \leq 2$ ya que los otros casos nos llevan a que $a = b$

Si $b=2$, entonces $b^{c-1} - 1 = 2^{c-1} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{c-2} > \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{c\text{-}1 \text{ veces}} = c - 1$ si $c > 2$, por lo que $c = 2$ nos da la única solución no trivial del problema que es $b = 2$ y $a = 4$, así

$$a^b = b^a \,,\, a \neq b \Leftrightarrow a = 4 \text{ y } b = 2.$$

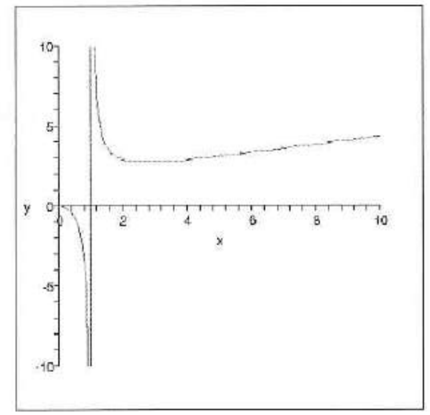
Ahora vamos a resolver el mismo problema usando otra herramienta, Cálculo. Si analizamos la expresión $a^b = b^a$ en los reales positivos, aplicamos logaritmo natural de los dos lados y usamos propiedades de los logaritmos, obtenemos que $a^b = b^a \Leftrightarrow b\ln(a) = a\ln(b)$.

Recordemos que la función $\ln$ es creciente y por lo tanto inyectiva por lo que $\ln(x)=\ln(y) \Rightarrow x = y$. Si a=1, entonces b tiene que ser uno y tenemos una solución trivial. Si a y b no son uno, podemos despejar y obtener que $\frac{a}{\ln(a)} = \frac{b}{\ln(b)}$.

Analicemos la función $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ con dominio en $(1,\infty)$.

Tenemos una función continua en todo su dominio, sabemos que $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$ y por lo tanto la derivada es cero si y solamente si $x = e$. En los además casos, como el denominador siempre es positivo, el signo de la derivada es positivo si $x > e$ y negativo si $x < e$. Así la función es decreciente en el intervalo $(0,e)$, creciente en (e, ∞) con un mínimo en $x = e$. Al ser estrictamente creciente en (e, ∞) es inyectiva en este intervalo y como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$,y $\lim_{x\to e^{+}} f(x) = e$, la imagen de la función es (e, ∞) y cada valor

en (e, ∞) se alcanza exactamente una vez. Análogamente, la función es decreciente en $(1,e)$ e inyectiva con $\lim_{x\to 1^{+}} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to e^{-}} f(x) = e$, entonces cada valor en (e, ∞) se alcanza una y solamente una vez en este intervalo. La gráfica de la función es



Por lo anterior, la función tiene la propiedad de que cada valor mayor que $f(e) = e$ se alcanza exactamente dos veces por lo que para cada $1 < a < e$ existe una única $b > e$ tal que $f(a) = f(b)$ es decir, tal que $\frac{a}{\ln(a)} = \frac{b}{\ln(b)}$

Regresemos a nuestro problema original. Sabemos que para cada número entero $a < 2$ existe un único $b > 2$ tal que $f(a) = f(b)$ que equivale a $\frac{a}{\ln(a)} = \frac{b}{\ln(b)}$ y con esto $a \ln(b) = b \ln(a)$ y de aquí $\ln(b^a) = \ln(a^b)$ y por ser inyectiva la función logaritmo, tenemos $a^b = b^a$.

Como 1 no está en el dominio de la función, vemos que el único valor entero para el cual tiene sentido la ecuación es $a = 2$ Para este valor, tenemos que $2^b = b^2$ con $b > 2$. Como el valor de b es único y $2^4=16 = 4^2$, ésta es la única solución en los números naturales de nuestra ecuación.

La función f, no sólo nos sirve para resolver nuestro problema, es una función bancarios. Estas medidas comenzarán a funcionar a partir del mes de diciembre de 2006 y toman en cuenta, por primera vez, el riesgo operativo.

El Comité de Basilea se ha ocupado, hasta ahora, de tres tipos de riesgo al que están expuestos los bancos: el de mercado, asociado a las fluctuaciones en el precio de los activos; el de crédito, asociado a la incertidumbre en el pago de las obligaciones de los deudores; y el operativo, que está asociado a la posibilidad de error humano, fallas tecnológicas, fraudes y desastres naturales. Esta lista no abarca todos los tipos de riesgo que afectan a las instituciones financieras.

El riesgo del mercado se estudia a través de un portafolios que puede consistir en acciones y bonos, en derivados, en préstamos o en la posición global de una institución financiera en activos con riesgo. La diferencia del valor de un portafolios al inicio de un período y al final de éste se conoce como la pérdida del portafolios en dicho período. Estas pérdidas se pueden poner en función de los rendimientos del portafolios; uno de los objetivos es estimar la distribución de las pérdidas. Dicha distribución nos permite calcular el Valor al riesgo (Var). El Var de nivel alfa es el cuantil alfa de la distribución de las pérdidas. Otra medida de riesgo es la medida de riesgo alternativo ES, que estima la pérdida promedio cuando se excede el Var.

Las técnicas que más se utilizan en la banca para valuar el Var y el ES son el método clásico, conocido como el método de varianza-covarianza, basado en el trabajo de Markowitz, en el que se asume que los rendimientos se distribuyen normalmente. La ventaja que presenta es que permite obtener la solución analítica sin necesidad de hacer simulaciones; su desventaja es que, al asumir la normalidad, se subestima la cola de la distribución de las pérdidas. El segundo método es el método histórico de simulación en el que, a diferencia del método anterior, la distribución de las pérdidas se estima a partir de la distribución empírica que se construye con la información de los datos históricos. Este método es fácil de implementar, no se requiere estimar la distribución de las pérdidas, pero requiere de una base completa de datos para todos los factores de riesgo. A veces no se tienen datos que permitan estimar situaciones extremas. Por último, se tiene el método de Monte Carlo, que consiste en lo siguiente: a partir de los datos históricos, se construye un modelo factorial que sirve para generar nuevos datos que estime las pérdidas para distintos escenarios futuros. Con esta información se infiere la distribución de las pérdidas y se estiman el Var y el ES. Este procedimiento es utilizado por la mayoría de los bancos grandes con cobertura internacional; requiere de cómputo intensivo, de bases de datos históricos muy completas y su automatización puede llevarse varios años. Todas las técnicas antes descritas están bien fundamentadas (ver [6]).

El riesgo crediticio es una tema en el que aún hay mucho trabajo teórico y aplicado por hacer. El riesgo crediticio es el riesgo provocado por cambios inesperados en la calidad crediticia de los deudores o de quienes emiten deuda. Se estudian las pérdidas posibles debido a la quiebra de los deudores o a la disminución de la calidad de la deuda. Hay varios modelos para estudiar este problema. Los que más se usan en la práctica son los modelos basados en el modelo de Merton, que fue introducido en 1974. La idea de Merton es expresar el valor de una empresa al tiempo t, V(t), como la suma entre el valor de sus acciones S(t) y de su deuda F(t). En el modelo más sencillo, la deuda consiste de un bono cupón cero con valor F a la madurez t. La quiebra ocurre cuando la empresa, al tiempo t, no tiene los recursos para pagar a sus tenedores de deuda. En este caso, lo que interesa estimar es la probabilidad que una empresa no pueda hacer frente a sus obligaciones, o sea, que $S(t)<F(t)$. Se asume que S(t) es un proceso estocástico. Si se supone que S(t) es un browniano geométrico, la probabilidad se evalúa fácilmente a través del modelo de Black-Scholes. El modelo más popular es el modelo KMV; fue desarrollado a inicios de la década de los noventa por la calificadora Moody y es una extensión del modelo de Merton para tomar en cuenta el comportamiento crediticio de los deudores. Se hace uso de grandes bases de datos, propiedad de esta empresa. Otro aspecto importante de este problema es determinar mecanismos, como el uso de las opciones, para cubrirse del riesgo crediticio. Este es una tema de intensa investigación, en la que muchos aspectos quedan por resolver, ver Crouhy *et al* [1] y Jeanblanc y Rutovsky [5].

Por último, está el riesgo operativo que fue definido, por el Comité de Basilea, como el riesgo a las pérdidas producidas por procesos internos deficientes o inadecuados, por fallas humanas o tecnológicas o por acontecimientos externos. Este tipo de riesgo ha ocasionado pérdidas cuantiosas para el sistema financiero. Algunos ejemplos de quiebras de banco por errores en la supervisión y conducción de la operación de un banco son los siguientes: en 1977, el caso del Credit Suisse; en 1995, la quiebra de Barings Bank por Nick Leeson; y en 2001, el caso de Enron.

El Comité de Basilea consideró 7 tipos distintos de pérdidas operativas: fraude interno, fraude externo, prácticas internas, prácticas de los clientes, daño a los activos físicos, fallas en los sistemas y, por último, en la administración de los procesos bancarios. Cómo evaluar y modelar las pérdidas para cada uno de estos rubros dará lugar a nuevas líneas de investigación. La falta de datos y la dependencia entre los factores de riesgo dificulta el manejo matemático de estos problemas con la metodología existente. Las pérdidas operativas, cuya frecuencia y monto son aleatorias, obligan a utilizar procesos del tipo de Poisson compuesto. Este tipo de modelos es muy utilizado en actuaría, por lo que se verá en el futuro un mayor acercamiento entre las finanzas y esta disciplina.

Asimismo, se ve que una de las formas para manejar el riesgo operativo es a través de la adquisición de seguros que cubran parte o la totalidad de las pérdidas, lo que implicará, para las empresas de seguros, nuevas líneas de productos con su necesaria valuación matemática. Un problema abierto es determinar cuál es la mejor medida para estimar el riego operativo ya que, seguramente, la distribución de las pérdidas presenta colas pesadas. Posiblemente, el uso de valores extremos sea una de las herramientas a utilizar (ver [4]).

Por lo tanto, los Acuerdos de Basilea II representan un reto tanto para las instituciones financieras como para la academia, ya que tendrán enormes implicaciones para el sistema financiero internacional. El análisis del impacto económico de estas medidas cae en el campo de los economistas pero, desde el punto de vista de los profesionistas que se ocupan de la valuación de riesgos financieros, los Acuerdos de Basilea II son buenas noticias. Por un lado, los departamentos de riesgo de las instituciones financieras tendrán nuevas responsabilidades y requerirán de personal con mayor formación académica, al menos con una maestría relacionada con riesgo financiero, que enfatice los aspectos de modelado y valuación matemática del riesgo. Por otro lado, beneficiarán también a los investigadores y a los productores de software financiero, quienes deberán responder con nuevas metodologías, susceptibles de implementarse en forma eficiente y flexible en una computadora, para el tratamiento de cada uno de los riesgos antes descritos. En suma, buenas perspectivas laborales para los alumnos de las carreras de actuaría, matemáticas y matemáticas aplicadas.

Referencias:

[1] Crouhy, M. and Galai, D. A comparative analysis of current credit risk models. J. Banking Finance 24. 2000.

[2] Embrechts P., Chavez-Demoulin, Furrer H.J., Kaufmann R. y Samorodnitsky G., Quantifying Regulatory Capital for Operatinal Risk: Utopia or Not?. Notas del curso impartido en el VIII Simposium de Probabilidad y Procesos Estocásticos. 2004.

[3] Embrechts P., Frey R. and McNeil A.J., Quantitative Risk management: Concepts, Techniques and Tools. Notas del curso impartido en el VIII Simposium de Probabilidad y Procesos Estocásticos. 2004.

[4] Extremes and Integrated Risk Management. Edited by P. Embrechts. UBS Warburg. Risk Books. 2000

[5] Bielecki T., Jeanblanc M and Rutkowsky M. Hedging of Defaultable Claims. Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance. 2004.

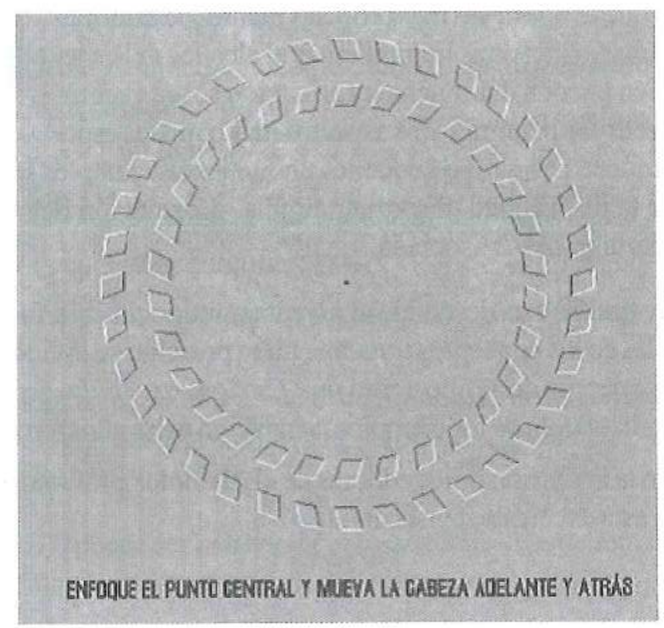
[6] Jorion, P., Value at Risk: The New Benchmark for Measuring Financial Risk. McGraw-Hill, New York. 2 edition. 2001.

Un médico, un abogado y un matemático están discutiendo si es mejor tener esposa o novia. Empieza el abogado diciendo:
- Obviamente, lo mejor es tener una novia, porque el divorciarte de tu mujer puede ser muy difícil y costoso, en cambio cortar con una novia es fácil.

El doctor dice:
- No, no, está claro que el tener una mujer te evita el estrés y mejora tu salud. Es mejor tener esposa.

Y el matemático responde:
- Lo mejor es tener las dos; así tu esposa cree que estás con la novia, la novia cree que estás con tu esposa, y mientras tanto tú puedes dedicarte a lo que realmente te interesa, hacer matemáticas.

Movimiento circular



Sobre anillos, retículas y algunas relaciones entre ellos

Carlos José Signoret Poillon
Departamento de Matemáticas, UAM-I
casi@xanum.uam.mx

Introducción

La *Teoría de Anillos* ocupa un lugar importante en el Álgebra Moderna y en las Matemáticas en general. Su relación con el Análisis Funcional, con la Geometría Algebraica, con la Teoría de Códigos y con la Física Teórica hacen de la Teoría de Anillos una rama de las matemáticas muy útil.

Pero el quehacer cotidiano del especialista en anillos, las técnicas con las que se estudian los anillos, son tal vez menos conocidas. Diversas son las herramientas que usa el anillista para someter a profundo escrutinio a tan elusiva estructura algebraica.

En primer lugar deberíamos mencionar a la *formación de cocientes* así como a la *localización* como herramientas muy directas en el estudio de los anillos (al menos en el caso conmutativo); en segundo lugar deberíamos mencionar a la *Categoría de Módulos* asociada al anillo, que es una de las más profusas fuentes de información sobre éste. Pero existen otras herramientas al alcance del especialista que también pueden dar mucha información sobre el comportamiento del anillo en determinados aspectos más o menos específicos. En este pequeño ensayo, presentamos unos cuantos ejemplos sobre este fenómeno, a saber, sobre la posibilidad de extraer alguna información del anillo a través de propiedades de cierta *Retícula* asociada.

Como este trabajo está destinado al mayor auditorio posible, incluimos en él una explicación sencilla de los conceptos tratados. La exposición se divide en tres partes: la presentación del concepto de Anillo como una *Estructura Algebraica*, la presentación del concepto de Retícula y la de los ejemplos de relación entre ellos, propiamente dichos.

Agradezco la invitación de los editores de «Laberintos e Infinitos» a presentar una colaboración para esta excelente revista divulgativa.

Estructuras Algebraicas

Una *estructura algebraica* consta de un conjunto G y una (o varias) operación(es) binaria(s) en G, es decir, una regla de operación entre los elementos de G, digamos *, de manera que a dos elementos a y b de G se les asocia un tercer elemento de G denotado con $a*b$. Esta asociación está sujeta a ciertas restricciones o axiomas; dependiendo de la naturaleza de estos axiomas, la estructura algebraica tiene diferentes nombres y se adapta más o menos bien a describir un fenómeno, ya sea matemático, físico o de algún otro tipo. La notación usual es: $(G,*)$.

Algunos ejemplos de estructuras algebraicas son:

1.-Grupoide: Es la más sencilla de todas pues la única operación no está sujeta a ningún axioma.

2.-Semigrupo: Es un grupoide $(G,*)$ en donde la operación es *asociativa*, es decir:

(Asociatividad) $a*(b*c)=(a*b)*c$ para todos $a,b,c \in G$.

Por ejemplo, si A es cualquier conjunto: $G=\{f : A \to A\}$ y $* = \circ$ la composición usual de funciones.

Los semigrupos han probado ser útiles en la Teoría de la Computación y en la Matemática Discreta.

3.-Grupo: Es un grupoide en donde la operación tiene un *elemento neutro* y hay *elementos inversos*, es decir, se cumplen:

(Neutro) $\exists\, e \in G$ tal que $a*e=a=e*a$ para todo $a \in G$

(Inversos) Para todo $a \in G$, $\exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a*a^{-1}=e=a^{-1}*a$

Por ejemplo, si A es cualquier conjunto: $G=\{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}$ y $* = \circ$ la composición usual de funciones. Aquí $e = Id_A$ la función idéntica y el inverso f^{-1} es la función inversa de f.

Los grupos están presentes en casi cualquier rama de la matemática, desde el Análisis y la Topología, hasta la Geometría, así como en muchas aplicaciones como la Cristalografía y la Física Cuántica.

El grupo $(G,*)$ puede ser *conmutativo* (o *abeliano* si se denota la operación como *suma* +) si la operación es *conmutativa*, es decir, si:

(Conmutatividad) $a*b=b*a$ para todos $a,b \in G$.

Por ejemplo, las estructuras numéricas bien conocidas, los números enteros Z, los números racionales Q, los números reales R, con la operación *suma* $+$ son grupos abelianos. Nótese que aquí la notación del neutro es 0 y no e, y que el inverso (aditivo) de un número x es $-x$ y no x^{-1}, notación reservada al inverso *multiplicativo* (cuando exista) de x.

4. *Anillo*: En un *anillo* $(R,+,\cdot)$ hay dos operaciones $+$ y $\cdot$ sujetas a los siguientes axiomas:

$(R,+,\cdot)$ es un grupo abeliano

(Asociatividad) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todos $a,b,c \in R$

(Distributividad) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ y

$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ para todos $a,b,c \in G$

El anillo $(R,+,\cdot)$ puede ser *conmutativo* (bajo la operación y/o *tener neutro*, también llamado *identidad* y usualmente denotado por 1).
Como ejemplos de anillos podemos mencionar las estructuras numéricas bien conocidas Z, Q ó R con la suma y el producto usuales. En este contexto notamos que Q y R tienen una propiedad que Z no tiene; a saber, que los elementos distintos de cero tienen inverso multiplicativo.

Otro ejemplo es el de las matrices $(M_n(R),+,\cdot)$ donde $M_n(R)$ es el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ con coeficientes reales, $+$ y $\cdot$ son las operaciones usuales de suma y producto de matrices. Este es un anillo no conmutativo con identidad.
Mencionamos también $(Z_n,+,\cdot)$ donde $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots \overline{n-1}\}$ es el conjunto de *enteros módulo n* sumados y multiplicados *según su representante*; es decir, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ y $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$. (Ver tabla 1)

Tabla 1. La suma y la multiplicación en Z_4 y la multiplicación en Z_5.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$

5.- Campo: Un campo $(F,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo con identidad en donde cada elemento diferente de cero tiene inverso multiplicativo. Como ejemplos claros tenemos Q, R y C. Podemos notar que Z_n es un anillo conmutativo con unidad pero que es un campo solamente cuando n es un número primo.

*6.-*Espacio Vectorial: Esta estructura tiene también dos operaciones, pero una de ellas es por elementos externos. Si F es un campo, un *espacio vectorial* sobre F es un conjunto V con una operación binaria $+$ y una segunda operación *multiplicación por escalares* $\cdot$ sujetas a los siguientes axiomas:

(EV) $(V,+)$ es un grupo abeliano

(Asoc.EV) $(\lambda \cdot \gamma) \cdot a = \lambda \cdot (\gamma \cdot a)$ para todos $\lambda, \gamma \in F, a \in V$

(Distrib.EV) $\lambda \cdot (a+b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$ y $(\lambda + \gamma) \cdot a = \lambda \cdot a + \gamma \cdot a$

para todos $\lambda, \gamma \in F,\ a,b \in V$

(Neut.EV) $1 \cdot a = a$ para todo $a \in V$.

Como ejemplos de espacios vectoriales sobre R tenemos los usuales R^n y los conjuntos de matrices $M_{m \times n}(R)$ de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales con la suma usual y el producto por un real entrada a entrada.

La estructura algebraica de Espacio Vectorial es extremadamente popular debido a que establece el marco teórico (El Álgebra Lineal) en donde se mueven muchísimas aplicaciones relacionadas con las Ecuaciones Diferenciales y los Sistemas Dinámicos.

7.- Álgebra de Lie: es un espacio vectorial $(A,+,\cdot)$ sobre el campo F (usualmente $F=R$ ó C) con una operación binaria adicional $[,]$ sujeta a los siguientes axiomas:

(Distrib.Lie) $[a,b+c] = [a,b]+[a,c]$ y $[a+b,c] = [a,c]+[b,c]$

para todos $a,b,c \in A$

(Homog.Lie) $[\lambda a, b] = \lambda[a,b] = [a, \lambda b]$ para todos $\lambda \in F$ y $a,b \in A$

(Nilp.Lie) $[a,a] = 0$ para todo $a \in A$

(Jacobi) $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ para todos

$a,b,c \in A$.

El ejemplo más común de álgebra de Lie es $M_n(C)$, el conjunto de las matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en R ó C, con la suma y el producto por escalares usuales y el producto definido por $[A, B] = AB - BA$.

Sorprendentemente esta estructura algebraica tiene mucha presencia en cuestiones de Física Teórica, principalmente lo relacionado con Cosmología.

Retículas

El concepto usual de *orden* entre los números reales es solamente un tipo particular de orden. El concepto más general de orden está más directamente relacionado con el de *inclusión* entre los subconjuntos de un conjunto.

Si A es un conjunto fijo, dos subconjuntos cualesquiera de A digamos B y C pueden no ser comparables, pero claramente diríamos que C es *más grande que* B si $B \subset C$.

Una relación de *orden parcial* en el conjunto X es una relación $\leq$ que satisface los siguientes axiomas:

CoPo 1 $\leq$ es *reflexiva*, es decir, $a \leq a$ para todo $a \in X$

CoPo 2 $\leq$ es *antisimétrica*, es decir, para $a, b \in X$, $[a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b]$

CoPo 3 $\leq$ es *transitiva*, es decir, para $a, b, c \in X$, $[a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c]$

Decimos que $(X, \leq)$ es un *conjunto parcialmente ordenado* (o un CoPo). Se dice que el orden *es total* si cada pareja de elementos a, b de X pueden ser comparadas, es decir, si:

CoTo Para todos $a, b \in X$ se cumple que $a \leq b$ ó $b \leq a$

Como ejemplos de CoPo podemos mencionar:

1. El orden usual en Z, o en Q o en R; es un orden total.
2. Si A es un conjunto, $(P(A), \subset)$ es un CoPo, donde $P(A) = \{\text{Subconjuntos de } A\}$.
3. En $X = Z^+$, definimos $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$ (a divide a b).
4. Si G es una gráfica orientada, $X = \{\text{vértices de } G\}$, decimos que $a \leq b \Leftrightarrow$ hay un camino orientado de a hacia b.

Ahí se observa que $a \leq i$, que d y h no son comparables y que m es máximo. (Nota, estamos suponiendo que para cada vértice hay una arista del vértice en sí mismo).

Un CoPo $(X, \leq)$ es una *Retícula* si para cada pareja de elementos de X existen en X un *supremo* y un *ínfimo*, es decir, para todos $a, b \in X$:

$\exists\, c \in X$ tal que: $a \leq c$ y $b \leq c$ y, para $k \in X$, $[a \leq k$ y $b \leq k \Rightarrow c \leq k]$ y
$\exists\, d \in X$ tal que: $d \leq a$ y $d \leq b$ y, para $k \in X$, $[k \leq a$ y $k \leq b \Rightarrow k \leq d]$.

En ese caso, se denota a c por $a \vee b$ y a d por $a \wedge b$. En referencia a los ejemplos anteriormente expuestos:

1. En R, $a \vee b = máx\{a, b\}$ y $a \wedge b = mín\{a, b\}$;
2. En $(P(A), \subset)$, $C \vee D = C \cup D$ y $C \wedge B = C \cap B$
3. En $(Z, |)$, $a \vee b = mcm(a, b)$ y $a \wedge b = mcd(a, b)$
4. En la gráfica, $a \vee c = i$, $b \vee d = g$; $h \wedge g = b$

Propiedades del Anillo R obtenidas por alguna Retícula

Ideales en los anillos

A continuación damos algunos ejemplos de relaciones entre los anillos y las retículas que ayudan a dar información sobre los primeros. Consideramos un anillo R conmutativo con identidad.

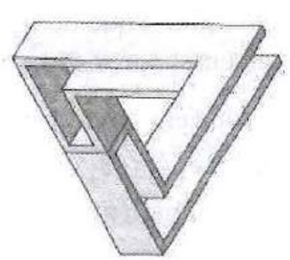
Las primeras propiedades que mostramos descansan en un concepto fundamental en la Teoría de Anillos, el de Ideal.

Un subconjunto I de R es un *Ideal* de R si cumple las siguientes condiciones:

(Subgrupo +) $0 \in I$ y $[a, b \in I \Rightarrow a - b \in I]$

(Cerradura) $[a \in I$ y $r \in R \Rightarrow ra \in I]$

La notación usual es $I \leq R$.



Como ejemplos de ideales podemos mencionar:

1. El conjunto $0 = \{0\}$ y el conjunto R trivialmente son ideales para cualquier anillo.
2. En $R = Z, I = nZ = \{nz \mid z \in Z\}$ es un ideal; más aún, todo ideal es de esa forma (para alguna n).
3. El conjunto $M_n(kZ)$ es un ideal del anillo $M_n(Z)$

Consideramos el conjunto $L(R) = \{I \leq R\}$ de todos los ideales de R y decimos que para $I, J \in L(R), I \leq J$ si $I \subset J$. Entonces es un CoPo. Más aún, es una retícula si notamos que $I \vee J = I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\} \leq R$ e $I \wedge J = I \cap J \leq R$. Esta retícula es llamada la *Retícula de Ideales del Anillo.*

La particularidad de los campos de ser anillos en donde cada elemento diferente de cero tiene inverso multiplicativo está íntimamente relacionada con la estructura de su retícula de ideales, como se ve en la siguiente:

1. R es un campo $\Leftrightarrow L(R) = \{0, R\}$

Anillos Noetherianos

Para mostrar el segundo ejemplo, consideramos en este punto una clase especial de anillos conmutativos, los *Anillos Noetherianos*, que se definen así:

(Noeth.) R es *Noetheriano* si no existen cadenas ascendentes estrictas infinitas de ideales $I_1 \lneq I_2 \lneq \ldots \lneq I_n \lneq I_{n+1} \lneq \ldots$ dentro de R. Se dice que $L(R)$ es una *retícula Noetheriana.*

Una forma de visualizar el concepto de Anillo Noetheriano es considerar las cadenas ascendentes de ideales del anillo como si fueran edificios (un ideal por piso). Entonces, la condición que define a este tipo de anillos sería:

«En un anillo Noetheriano todos los edificios tienen azotea».

Nótese que no hay nada que impida que haya edificios arbitrariamente altos, solamente se precisa que no hay edificios infinitamente altos.

Por ejemplo, Z es una anillo Noetheriano pues si tomamos una cadena ascendente de ideales: $k_1Z \leq k_2Z \leq k_3Z \leq \ldots$ observamos que $\ldots k_3 \mid k_2 \mid k_1$. Como solamente hay un número finito de divisores de k_1, la cadena debe ser finita.

- Si $L(R)$ es Noetheriana, entonces el anillo es una suma directa de anillos indescomponibles (que no pueden descomponerse a su vez).

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$$

Para no entrar en detalles, mencionamos que en la práctica, esto significa que la estructura del anillo R es muy sencilla; está formado básicamente de «pequeños» bloques «indivisibles» muy simples. Esto facilita en gran manera la labor del algebrista que está sometiendo a estudio el anillo.

Vamos ahora hacia el tercer ejemplo. En Z cada número es representable en forma única (salvo el orden) como un producto de potencias de números primos. Por ejemplo

$72600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 11^1$

Traducida al lenguaje reticular, esta propiedad implica que, si

$$a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_5^{r_2}$$

entonces

$$dZ = (p_1^{r_1}Z) \cap (p_2^{r_2}Z) \cap \ldots \cap (p_5^{r_2}Z)$$

Hay muchas propiedades de los anillos que corresponden a algún tipo de extensión de propiedades del anillo de los enteros. Un ejemplo de ello es el siguiente:

Un ideal $Q \neq R$ es *primario* si se cumple la propiedad:

$[xy \in Q \Rightarrow x \in Q$ ó $y^n \in Q$ p.a. $n]$.

Este concepto es el que toma el lugar de «primo» en los anillos más generales como lo muestra la siguiente propiedad que es clásica en la teoría de anillos conmutativos:

- Si $L(R)$ es Noetheriana, entonces cada ideal de R se descompone como intersección finita de ideales primarios. La descomposición es única salvo radicales (básicamente salvo lo que equivaldría a los primos, sin potencias).

Filtros Lineales

Consideramos ahora familias de ideales. Tomamos un anillo R con unitario.

Una familia no vacía de ideales F es un *Filtro Lineal (izquierdo)* si cumple las siguientes propiedades:

Fil.1 Si $I, J \in F$ entonces $I \cap J \in F$

Fil.2 Si $I \in F$ y J es un ideal izquierdo de R tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in F$

Fil.3 Si $I \in F$ y $a \in R$, entonces $\{r \in R \mid ra \in I\} = (I : r) \in F$.

Consideramos el conjunto R-fil $= \{F \subseteq L(R) \mid F$ es un filtro lineal (izq)$\}$ y decimos que $F \leq K$ si $F \subseteq K$.

Entonces (R-fil, $\leq$) es un CoPo; más aún, es una retícula si notamos que

$F \wedge K = F \cap K$ y

$F \vee K = \cap\{H \in R\text{-fil} \mid F \leq H \text{ y } G \leq H\}$.

Como ejemplos de filtros lineales podemos mencionar:

1. $0 = \{R\}$ y $1 = L(R)$ son los elementos menor y mayor, respectivamente, en R-fil.
2. Si I es un ideal de R, entonces el conjunto F de los ideales izquierdos que contienen a I.
3. El conjunto F de los ideales izquierdos H en R tales que R / H es un anillo noetheriano (izq.).
4. Un filtro lineal se llama *filtro de Gabriel* si cumple la siguiente propiedad:

Gab

Si $I \in F$ y J es un ideal de R tal que $(a : J) \in F$ para toda $a \in I$, entonces $J \in F$.

Aquí $(a : J) = \{r \in R \mid ra \in J\}$. A la colección de filtros de Gabriel se le denota por R-Gab. Es una retícula con las mismas operaciones que R-fil.

Esta retícula (y otras emparentadas con ella) constituyen una parte importantísima en la *Teoría de la Localización no Conmutativa*, área de especial relevancia en la teoría de anillos y el *Álgebra Homológica.*

La siguiente propiedad muestra la influencia de la retícula de los filtros lineales sobre el anillo:

- Un anillo conmutativo R cumple la condición

$$R\text{-fil} = R\text{-Gab}$$

si y sólo si R es un producto finito de campos.

Otras Retículas

Terminamos esta exposición mencionando que hay otras retículas asociadas a los anillos que también han sido estudiadas y han proporcionado información importante en Teoría de Anillos. En cada una de ellas se está haciendo o se ha hecho trabajo de investigación en México. Proporcionamos una bibliografía básica de consulta para estos temas.

1. R-tors, la retícula de las *teorías de torsión hereditarias* sobre R.
2. R-Tors, la retícula de las *teorías de torsión* sobre R.
3. R-pretors, la retícula de las clases *de pretorsión hereditaria* sobre R.
4. R-ss, la gran retícula de *clases de Serre* sobre R.

5. R -op, la gran retícula de *clases abiertas* sobre R .
6. R -nat o $N_l(R)$, la retícula de *clases naturales* sobre R .
7. R -prenat, la retícula de *clases prenaturales* sobre R .
8. R -pr, la gran retícula de *prerradicales* sobre R .

Bibliografía:

Anderson, F; Fuller, K. *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag, New-York, 1992.

Bican, L; Kepka, T; Nemec, P. *Rings, Modules and Preradicals*. Marcel Dekker, New York, 1982.

Rogelio Fernández-Alonso, Francisco Raggi, Hugo Rincón, José Ríos, Carlos Signoret. *The lattice structure of preradicals*. Communications in Algebra 30(3), p.p. 1533-1544, 2001.

Jonathan Golan. *Torsion Theories*, Longman Scientific and Technical, Harlow U.K. 1986.

Jonathan Golan. *Linear Topologies on a Ring: an Overview*. Longman Scientific & Technical. UK. 1987.

Hugo Rincón, José Ríos, Alejandro Alvarado. *On the lattices of natural and conatural classes in -mod*. Communications in Algebra 29(2), p.p. 541—556, 2001

Raggi, F; Ríos, J; Wisbauer, R. *The lattice structure of hereditary pretorsion classes*. Communications in Algebra 29(1), 2001, p.p.131-140.

Francisco Raggi, Carlos Signoret. *Serre Subcategories of -Mod*. Communications in Algebra, 24(9), 2877-2886 (1996).

Francisco Raggi, Carlos Signoret. *Serre subcategories and Linear Filters*. Kyungpook Mathematical Journal. Vol 38, Nr. 2 (1998), 411-419.

Bo Stenström. *Rings of Quotients*. Springer-Verlag. Graduate Texts in Mathematics No. 175, New York, Berlin, 1975.

Carlos José E. Signoret Poillon
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, México 09340 D.F. MEXICO
Tel. 5804-4655 Fax. 5804-4660

Moros y Cristianos

Tras una gran batalla, el sultán Aben Hazzar, mandó a su Gran Visir reunir a los 30 prisioneros que habían capturado (15 cristianos y 15 moros), con objeto de arrojar al mar a la mitad de ellos.

«Colócalos en círculo y contando de 9 en 9, arroja al agua al que le toque cada vez».

El Gran Visir, que odiaba a los moros, colocó a los 30 prisioneros de tal forma que salvó a los 15 cristianos.

¿Cómo los colocó?

El Trielo

Cuentan que el mismo día en que Galois mantenía el duelo en el que perdería la vida a los 21 años, tuvo lugar otro, entre tres caballeros que se habían causado graves ofensas: el Caballero Blanco, el Caballero Gris y el Caballero Negro. Habían decidido finalmente enfrentarse con unas curiosas reglas que ellos mismos habían establecido, como veremos, sin pensar demasiado. Se situarían en triángulo, elegirían sus armas y dispararían por turnos, concediendo el primer disparo al Caballero Blanco, tras el cual dispararía el Gris y después el Negro, y repetirían este proceso hasta que sólo quedara uno de ellos.

Siendo Caballeros, habían concedido el primer turno al Caballero Blanco, porque todos sabían que, en promedio, solía acertar a su objetivo tan sólo un tercio de las veces que disparaba. Le seguía el Gris, que daba en el blanco dos tercios de las veces que disparaba, y tras él el caballero Negro, que era temible porque jamás erraba un tiro.

Se encontraron al amanecer, y pronto le llegó el turno al Caballero Blanco de hacer el primer disparo.

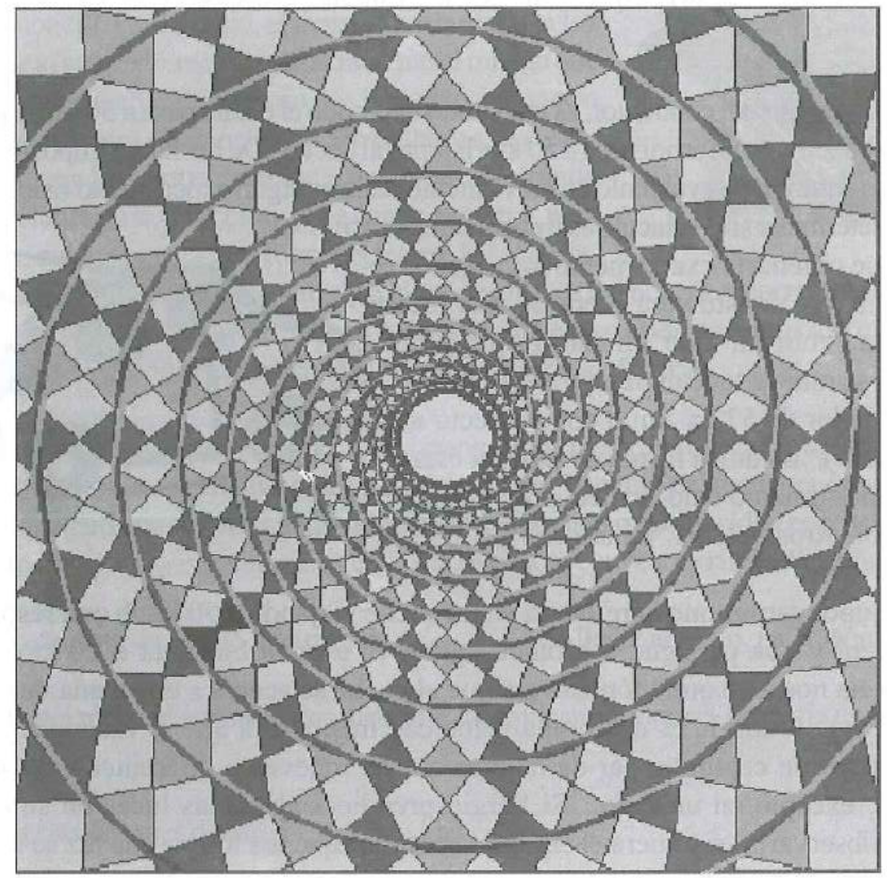
¿Cuál era la mejor opción del Caballero Blanco, para que le quedara mayor posibilidad de sobrevivir?

4783527350981426893456372829648567585959733420928634530394857612325347756503937612345678909876543213425643993847565757511980964554685959

¿Cuál es el producto de la siguiente serie?

$$(x-a)(x-b)(x-c)...(x-z)$$

¿Circunferencias o espiral?



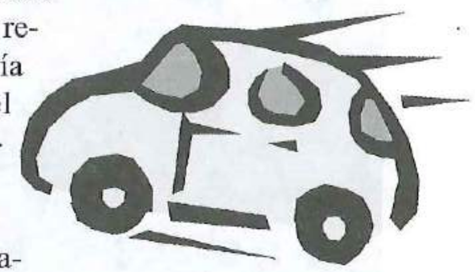
Relatividad Especial

Daniel García Ulloa
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM
danieles84@hotmail.com

En memoria de Ariadna

La vida nos ofrece una gran diversidad de situaciones en las que las observaciones de dos individuos difieren. Desde el punto de vista de un conductor, las casas, los árboles y el policía de tránsito parecerían estar en movimiento, mientras que las puertas o el espejo retrovisor están, desde su punto de vista, en reposo (o al menos deberían estarlo!). Sin embargo, desde el punto de vista del policía de tránsito, es el conductor y su coche quienes están en movimiento. La relatividad especial afirma que estas diferencias son más profundas y sutiles de lo que parecen, e incluso atentan en ocasiones contra el sentido común.

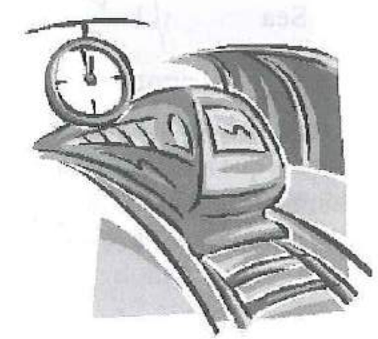
En el caso del conductor, es tan válido decir que el coche pasa a 50 km/h junto a un árbol a decir que un árbol pasa a 50 km/h junto al coche. De hecho, es imposible para un viajero dentro de un vehículo en movimiento realizar algún experimento físico que le permita determinar si el vehículo está en movimiento o no, ya que obtendría exactamente los mismos resultados a que si estuviera fuera de éste (sería prudente recordar que un habitante en el Ecuador se mueve todo el tiempo a una velocidad alrededor de 532π km/h con respecto al eje terrestre). La única forma de saber si estamos en movimiento o no es mediante la comparación con otros objetos "exteriores".



Supongamos que Sergio está en un coche viajando a 50 km/h con respecto a la carretera y que persigue a Mónica, quien va en una bicicleta a 20 km/h. La experiencia nos dice que Mónica verá que el coche se acerca a ella a una velocidad de (50-20=) 30 km/h, es decir, una velocidad menor a la que se mueve el coche. Esto ocurre con cualquier par de objetos que se mueven a diferentes velocidades relativas, excepto en un caso. Si Sergio prendiera ahora las luces de su coche, Mónica observaría (si tuviera el equipo necesario) que los fotones de luz se acercan a ella a una velocidad de 299,792.458 km/s.

Si Mónica se subiera a una nave super veloz y se alejara de Sergio a una impresionante velocidad de 10,000 km/s, el razonamiento newtoniano nos haría suponer que Mónica vería los fotones acercándose a ella a una velocidad de (299,792.458 – 10,000=) 289,792.458 km/s. Sin embargo, esto no sucedería; Mónica seguiría observando que los fotones se acercan a ella a 299,792.458 km/s. De hecho no importaría si Mónica condujera hacia los fotones, se alejara de ellos o los persiguiera, de cualquier forma vería que los fotones se mueven a 299,792.458 km/s. La velocidad de la luz es siempre la misma, independientemente de la velocidad relativa de la fuente y el observador.

¿Qué pasaría si Sergio se encontrara al final de un vagón del metro y lanzara fotones de luz hasta el principio del vagón, donde se encuentra un espejo que rebote los fotones? Para Sergio, el tiempo que tardaría la luz en llegar al otro extremo sería exactamente el mismo que el que tardaría en ir de regreso, no importa si el metro avanza hacia otra estación o no. Sin embargo, si el metro sí avanza hacia otra estación y Sergio está mirando hacia delante en la dirección que avanza el metro, para Mónica, quien se encuentra fuera del metro, la luz tardará más de ida que de regreso debido a que para ella, la luz deberá recorrer una distancia mayor de ida que de regreso. A partir de estas observaciones podemos afirmar que el tiempo transcurre más lentamente para Sergio que para Mónica.



Para cuantificar estos efectos, supongamos que Sergio dirige los fotones hacia arriba, que el metro se mueve a una velocidad v, que la altura del metro es h y que t es el tiempo que tarda un fotón en llegar al techo. Recordando que velocidad es igual a distancia entre tiempo y que la velocidad de la luz se denota convencionalmente como c, desde el punto de vista de Sergio, la luz tarda $t_{adentro} = \frac{h}{c}$ en llegar al techo, para Mónica, el metro habrá recorrido además una distancia vt. Aplicando ahora el Teorema de Pitágoras, el fotón recorre una distanci $ct_{\text{afuera}} = \sqrt{h^2 + (vt_{afuera})^2}$.

De la ecuación anterior podemos despejar la altura:

$$h = \sqrt{(ct_{afuera})^2 - (vt_{afuera})^2} = t_{afuera}\sqrt{c^2 - v^2}$$

Dado que la altura del metro es igual para los dos observadores,

$$ct_{adentro} = t_{afuera}\sqrt{c^2 - v^2} \text{ y finalmente, } t_{afuera} = \frac{t_{adentro}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{con } 0 \leq v < c$$

Sea $\Gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, entonces $t_{afuera} = t_{adentro}\, 1\,(v)$ donde $1 : [0,c) \rightarrow [1,\infty)$

*representa la dilatación del tiempo experimentada por un observador en movimiento. Notemos que mientras más nos acerquemos a la velocidad de la luz (i.e. v--> c) el valor de Γ aumenta y por lo tanto $t_{adentro}$ disminuye, es decir, el tiempo se dilata. Ha transcurrido menos tiempo para el observador que está en movimiento.

Esta diferencia en el tiempo es casi imperceptible ya que c^2 es un número considerablemente grande y $\frac{v^2}{c^2}$ es por lo general un valor muy cercano a 0. Sin embargo, los efectos de la relatividad especial se han podido verificar experimentalmente con aceleradores de partículas. Los muones son partículas que se desintegran después de haber cumplido la edad de 2 millonésimas de segundo, pero si se les acelera a una velocidad del 99.5% la velocidad de la luz, su promedio de vida se multiplica por 10 (notemos que Γ (0.995c) $\approx$ 10). De este modo, si una persona que fuera a vivir 83 años se le metiera dentro de un acelerador de partículas, podría vivir ahora 830 años. Lo único malo es que sólo podrá realizar el mismo número de actividades que podía realizar estando inmóvil, ya que también la velocidad a la que realizaría sus actividades sería menor. En otras palabras, si la persona podía comer 20 pizzas a lo largo de su vida, moviéndose a esta velocidad podrá comer también solo 20 pizzas, y desde el punto de vista de las personas afuera, esta persona estaría haciendo todo en cámara lenta. Sin embargo, podríamos considerar que esta es una forma de viajar hacia el futuro, con la notable desventaja de que sólo hay boleto de ida.

Una de las más grandes implicaciones de la teoría especial de la relatividad es que el tiempo es relativo y depende de quien lo mida. Esto significa que incluso la simultaneidad es relativa. Es decir, que dos sucesos que para un observador ocurren en forma simultánea, para otra ocurre primero uno y luego otro. Debido a esto, no tiene sentido preguntarse qué está ocurriendo en estos momentos en otra galaxia sin especificar con respecto a quien (¿con respecto a nosotros?, ¿con respecto a un habitante de otra galaxia?, ¿con respecto a un viajero terrestre con destino a otra galaxia?, etc).

Un hecho sorprendente sobre la teoría de la relatividad es que aún cuando las observaciones de dos personas difieren en función de su velocidad relativa, existe algo que se mantiene constante para ambos, ya que

$$(\Delta t)^2 - (v\Delta t)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - (v'\Delta t')^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\text{intervalo})^2$$

donde Δx representa un cambio en el espacio. El cuadrado del intervalo puede ser un valor positivo, negativo o cero, dependiendo cuál de los cambios haya sido mayor. Si es positivo (i.e. $\Delta t > \Delta x$) se denomina entonces distancia invariante de tiempo o tiempo propio entre dos eventos y se representa con la letra griega τ, donde:

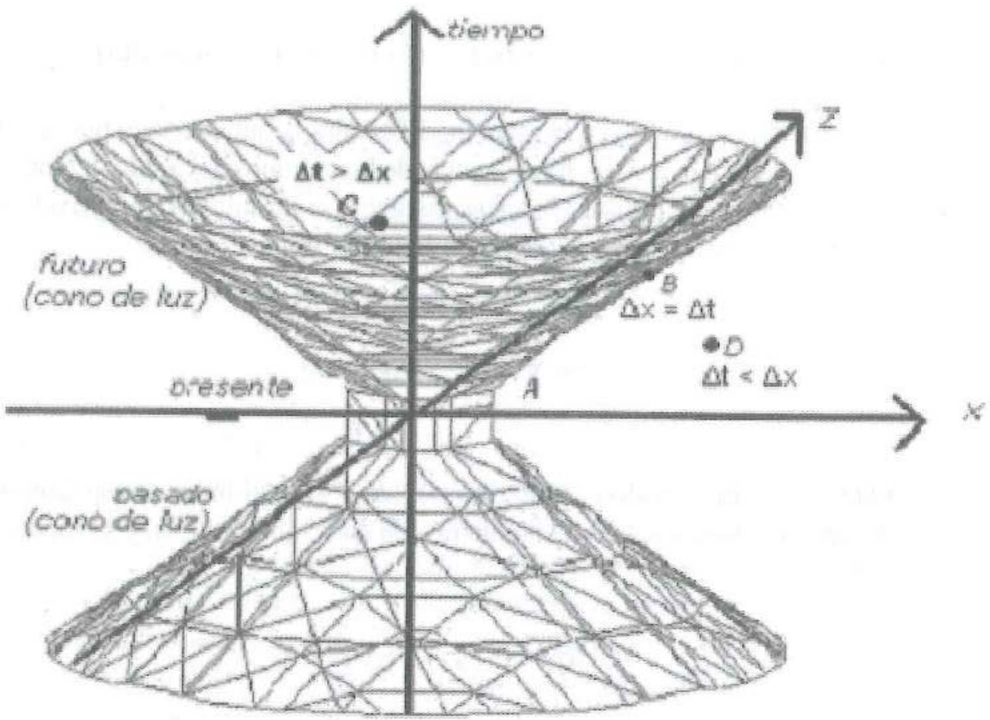
$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}$$

Si el valor del intervalo es negativo (i.e. $\Delta t < \Delta x$) el intervalo se denomina distancia invariante del espacio o distancia propia entre dos eventos, y se representa con ó , donde:

$$\Delta\sigma = \sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2}$$

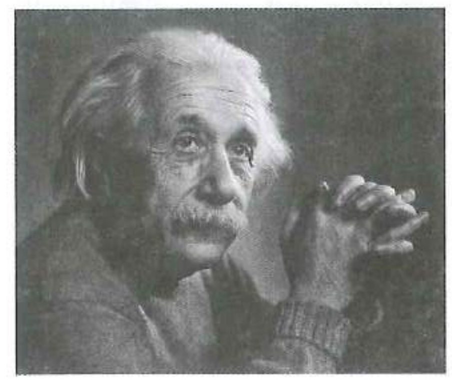
¿Que significa físicamente la expresión $\Delta x = \Delta t$? La izquierda de la ecuación es la distancia entre dos puntos, pero también representa el tiempo que necesita la luz en viajar una distancia entre el evento A (por ejemplo, lanzar el fotón de luz al techo del metro) y el evento B (que el fotón llegue al techo).

Por otro lado, Ät representa el tiempo disponible para viajar esta distancia. En otras palabras, el intervalo entre A y B desaparece cuando un fotón de luz en A logra llegar precisamente a tiempo para el evento B. El intervalo entre dos eventos es cero si pueden ser conectados mediante un rayo de luz. En el ejemplo del metro, la salida del fotón de luz (evento A) debería entonces estar conectado mediante un rayo de luz con la llegada del fotón al techo (evento B). A continuación se presenta un diagrama del espacio-tiempo (quitando una dimensión espacial). El evento A se localiza en el origen mientras que cualquier punto en los conos es un punto B. En otras palabras, B es cualquier evento cuyo intervalo con A es igual a 0. Los demás eventos cotidianos caen en algún punto C dentro de alguno de los conos de luz.



Consideremos un plano paralelo al plano XZ y que pasa por el punto B. La intersección de el plano con el cono de luz forma un círculo en este diagrama. Este círculo formaría en realidad una esfera en un diagrama *x, y, z, t,* y representa el lugar geométrico del pulso del fotón de luz que emergió de A. Conforme avanza el tiempo, aumenta el radio del círculo.

Entonces, el cono de luz del futuro nos dice la historia de expansión de un fotón que se originó en A. De igual forma, el cono de luz del pasado nos dice la historia de un fotón que converge hasta colapsarse en el origen en el tiempo cero. De estas observaciones podemos concluir que ningún evento D puede ser afectado por un evento A a menos que D se encuentre en el cono de luz o dentro de éste. Para poner un ejemplo en concreto, supongamos que el Sol se encuentra en el origen y la Tierra en algún punto sobre el eje X diferente al origen. Entonces, la Tierra está en t = 0 fuera del cono de luz del Sol. Si en ese momento se apagara el Sol, en t = 0 la Tierra no se vería afectada, sino hasta un tiempo t ◡ 8 minutos, cuando la Tierra haya entrado al cono de luz del Sol y pueda ser afectada por éste. De esta forma, la teoría de la relatividad impone un límite de velocidad en el universo establecido por la velocidad de la luz. Ningún evento A puede afectar instantáneamente a un evento D si éste se encuentra fuera del cono de luz de A.



La teoría especial de la relatividad generó grandes controversias. Albert Einstein, el descubridor de las teorías especial y general de la relatividad, había destronado los supuestos de reposo absoluto y de tiempo absoluto. Esta idea le resultó inquietante a mucha gente, que se preguntaba si implicaba que todo era relativo, que no había reglas morales absolutas. La teoría especial de la relatividad también fue el preámbulo para la teoría general de la relatividad, otra de las teorías que han sacudido los cimientos de la física y que ha establecido una nueva forma de concebir el universo. Sin embargo, de aquella teoría tendrá que hablarse en otro tiempo.

Bibliografía

Taylor/Wheeler. Spacetime Physics. W.H. Freeman and Company, San Francisco

Greene, Brian. The Elegant Universe. W.W. Norton, New York.

Hawking, Stephen. El Universo en una cáscara de nuez, Editorial Crítica/Planeta, Barcelona, 2001.

Noreña Villarías, Francisco. La manzana de Einstein. Editorial ADN. México, D.F.

* Se restringe el dominio y la imagen de la función al primer cuadrante ya que cualquiera de los otros implicaría tiempos o velocidades negativas, los cuales están, en este caso, fuera de contexto.

Se encomienda a un ingeniero, un físico y un matemático la «difícil» tarea de abrir una lata de sardinas.

El ingeniero levanta la lata, la sopesa, sujeta la hebilla del cinturón, hace palanca, levanta una esquina y acaba por estrellarla contra la pared una vez que la estructura tiene un punto débil. -Lata abierta, prueba conseguida.

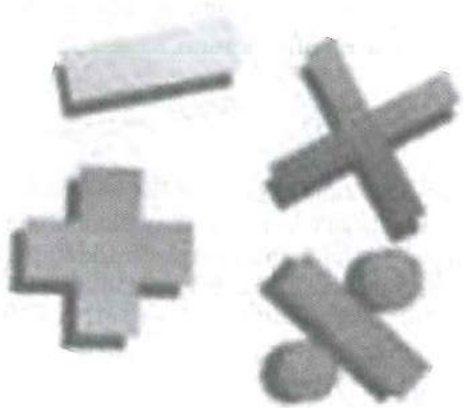
El físico levanta la lata, sopesa, mide, halla presiones, distribuciones de carga y lo que le dé por calcular, busca una mesa pesada y, con la pata, la machaca. -Lata abierta....

El matemático levanta, sopesa, calcula longitudes de arista, integrales de volumen del gas encerrado en la lata, densidad media de la carne de las sardinas, esperanza del número de sardinas dentro de la lata y después de un rato dice:
-Bien. Supongamos que ya esté abierta...

Siempre 6

En cada linea hay tres números, que con simples operaciones matemáticas tienes que conseguir que el resultado siempre sea seis. Las operaciones que se pueden usar son las normales en una calculadora científica:

1 1 1 = 6
2 2 2 = 6
3 3 3 = 6
4 4 4 = 6
5 5 5 = 6
6 6 6 = 6
7 7 7 = 6
8 8 8 = 6
9 9 9 = 6
Por ejemplo:
6+6-6 = 6
7 - 7 / 7 = 6
El resto lo dejo para ti.



La Lógica Formal y el Psicoanálisis

Dr. Walter Beller
Psicoanalista, doctor en filosofía y catedrático de la UIA y del TEC de Monterrey.
walter_beller@hotmail.com

¿Se imaginan a un psicoanalista empleando una variedad de instrumentos formales como las estructuras algebraicas, la teoría de grafos, los modelos topológicos o la lógica matemática más sofisticada? Por sorprendente que pudiera parecer, el psicoanálisis usa de manera constante técnicas, procedimientos, fórmulas y conceptos formales, adaptados y modificados para sus propios fines. Existen buenas razones para hacerlo.

Como teoría y como práctica (clínica), el psicoanálisis trabaja exclusivamente con la palabra, con el discurso del paciente. El lugar del inconsciente son las palabras, y a través de ellas el sujeto trata de formular una verdad que se le escapa. Constituyendo el único medio para establecer el padecimiento (el síntoma) del analizante, y al mismo tiempo el vehículo inseparable de la cura analítica, las palabras y lo que el sujeto dice sin saber conforman estructuras homólogas a las estructuras elaboradas en la matemática. Por esta razón, Jacques Lacan –uno de los más influyentes psicoanalistas– puntualizó que "el inconsciente está estructurado como un lenguaje".

En lo que sigue vamos a examinar –a título meramente indicativo– algunos conceptos coincidentes entre la lógica contemporánea y el psicoanálisis. Distinguimos dos momentos: (1) cómo y por qué S. Freud, el fundador de nuestra disciplina, utilizó nociones que prefiguran los desarrollos de lo que hoy conocemos como lógicas no clásicas; y (2) cómo Lacan construye un instrumento formal al que se ha denominado "lógica del significante", que es una estructura peculiar.

Las lógicas no clásicas o heterodoxas resultan de la crítica y el abandono de los fundamentos en los que se apoya la lógica clásica, establecida por Frege. Ella se caracteriza por ser bivalente (opera sólo con dos valores de verdad), es asertórica (los valores de verdad no presentan ningún matiz o modalidad) y se basa en los tres principios "supremos" (identidad, no contradicción y tercero excluido).

El desarrollo posterior de la lógica parte de esa estructuración clásica y se inicia en 1920 con la emergencia de las lógicas trivalentes, que luego dieron lugar a los sistemas con múltiples e infinitos valores de verdad; después, con la edificación de las lógicas modales; pasando por la postulación de la lógica intuicionista (ligada al constructivismo en filosofía de la matemática) cuyo rasgo más trascendente es el rechazo al principio del tercero excluido; hasta las lógicas paraconsistentes, que son sistemas que admiten teorías formales contradictorias pero no triviales.[1] Las lógicas no clásicas preservan el carácter deductivo y analítico de la lógica clásica, de manera que se ciñen a la relación de "consecuencia lógica" (si queremos enfocarlo desde el punto de vista semántico).

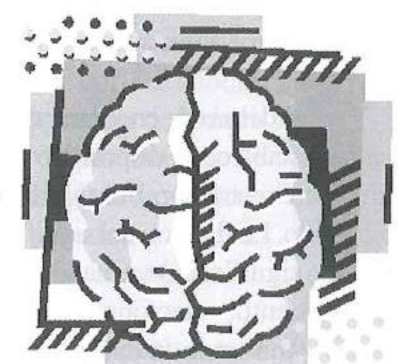
En dicho marco se pueden ubicar ciertos vínculos de la lógica con el psicoanálisis. Freud especificaba que la dimensión más esencial y dinámica del inconsciente es lógica, como lo indica en el texto S*obre la psicoterapia de la histeria* (incluido en Estudios sobre la histeria). El concepto de inconsciente formulado por Freud no se remite a sus contenidos o sus manifestaciones fenoménicas, sino que se determina por su estructuración formal, que es el fundamento de su dinámica. Es decir, es un concepto que no deja de tener relación con la lógica. Aunque la cuestión es dilucidar en qué lógica pensaba Freud para dar cuenta del funcionamiento inconsciente. Como lo han advertido varios autores, creo que *los procesos inconscientes requieren de los conceptos y del talante de las lógicas no clásicas.*[2] En su época, Freud no tuvo conocimiento de las formulaciones de Frege y de Russell y, por ende, no tenía en su horizonte a la lógica simbólica. Pero eso no significa que sus planteamientos sobre el inconsciente no puedan ser leídos en la actualidad como coincidentes con ella y sobre todo con sus desarrollos posteriores.

En la obra de Freud se encuentran constantemente ejemplos de transgresiones a los principios lógicos clásicos. Así ocurre en la interpretación del trabajo del sueño, que contrasta con la vida conciente. "El sueño es inconexo –escribe–, no le repugna unir las contradicciones más ásperas, admite cosas imposibles, desecha el saber del que nos preciamos durante el día, nos muestra embotados en lo ético y en lo moral. A quien en la vigilia quisiera portarse tal como el sueño lo exhibe en situaciones, lo tendríamos por insensato; quien despierto hablase como lo hace en sueños o quisiese comunicar cosas tal como ocurren en el contenido de los sueños, nos impresionaría como un confundido o un deficiente mental."[3] Pese a todo, Freud descubre en ese terreno una lógica específica.

En sus indagaciones sobre el sueño y otras formaciones del aparato psíquico, Freud se vio obligado a reconocer que el inconsciente desconoce los principios de contradicción y del tercero excluido. En el texto *Lo inconsciente* dice: "Dentro de este sistema no existe negación, no existe duda ni grado alguno de certeza", y más adelante apunta su carácter: "*ausencia de contradicción*".[4] Esto significa que los procesos inconscientes se despliegan a través de manifestaciones contradictorias, de manera que A puede ser al mismo tiempo no-A. Así se expresa, simultáneamente, como ni sí ni no –o sea, no 'sí o no' que, en virtud de la Ley de Morgan, equivale a 'sí y no', o sea, constituye una *antinomia*–.[5] Tal es lo que ocurre en el pensamiento onírico y también en el chiste, que Freud lo consideraba una formación del inconsciente. Por lo tanto, la ausencia del principio de contradicción, como propiedad lógica del inconsciente, no como la ausencia de lógica en él, determina un funcionamiento que es concordante con los elementos de la lógica paraconsistente, desarrollada décadas después de Freud.

Coincidencia que también podemos observar si consideramos el concepto psicoanalítico de ambivalencia. De una manera general, se habla de ambivalencia cuando se da una presencia simultánea en el mismo sujeto de deseos, ideas o afectos antitéticos (en particular del par amor-odio) respecto de un mismo objeto. De este modo, la afirmación y la negación son simultáneas e inseparables. La ambivalencia muestra que el sujeto está escindido y que el inconsciente no se gobierna por el principio de la bivalencia. Lejos de ser una excepción, la ambivalencia constituye una constante de la vida afectiva. En los textos freudianos, la ambivalencia se produce en relación con la pulsión sexual, en la dupla activo-pasivo, así como en la vinculación amor-odio, donde no cabe el principio formal clásico de bivalencia.

Por otro lado, es preciso esclarecer que el interés del psicoanálisis en la lógica no reside en el deseo de encontrar un lenguaje (formal) más preciso y mejor adaptado para el funcionamiento del inconsciente, ni en la búsqueda de un ropaje que se aplicaría exteriormente a los fenómenos clínicos, confiriéndoles rigor y exactitud. Más bien, lo que interesa al psicoanálisis es construir un dispositivo formal que permita dar cuenta de lo equívoco y del sin sentido. Un dispositivo que, además, incluya lo que la lógica excluye: el sujeto. De ahí que la relación con la lógica no puede menos que resultar extravagante e insólita.



Jacques Lacan

El psicoanálisis estudia con gran atención las paradojas lógicas, como la del "mentiroso". A diferencia de los lógicos, que indagan sobre las paradojas como desafío racional, el psicoanalista las investiga porque expresan contradicciones y equívocos inescapables. Así, la paradoja del mentiroso constituye un punto de partida para la formulación lacaniana de la verdad en psicoanálisis. "Yo pregunto –dice Lacan– donde hay una paradoja: ¿puede haber algo más verdadero que la enunciación 'yo miento'? El regateo fácil que se enuncia con el término de paradoja sólo toma cuerpo si ustedes colocan el 'yo miento' sobre un papel, a título de escrito. Todo el mundo siente que no hay nada más verdadero que se pueda decir, llegado el caso, que 'yo miento'. Es por cierto la única verdad que, llegado el caso, no será quebrada. Porque, ¿quién no sabe que al decir 'yo no miento' no se está para nada al abrigo de decir algo falso?"[6]

Toda palabra verdadera, para postularse como verdadera, debe decir de sí misma que no es mentirosa, y lo mismo profiere toda palabra mentirosa. Una versión modificada de la paradoja de Epiménides afirma: "te aseguro que ahora estoy mintiendo", y es lo mismo que ocurre con la palabra verdadera: "te aseguro que ahora te estoy diciendo la verdad"; o sea, ésta debe decir de sí misma que no es mentirosa, al igual que lo dice aquélla. Ese es el problema que advierte Lacan: la palabra misma debe garantizar la verdad, a diferencia de la exactitud que se garantiza por su adecuación a lo Real. Como la palabra, para garantizarse como verdadera, debe decir de sí misma que no es mentirosa, hace lo mismo que la palabra mentirosa. Por consiguiente, no hay palabra que pueda evitar los efectos de la falta de verdad de la verdad. O lo que es lo mismo: no hay verdad de la verdad. (Por supuesto, el recurso a la teoría de los tipos lógicos, tampoco resuelve el problema, ya que sólo lo pospone al infinito.)

Además de encontrar una significación peculiar a las paradojas lógicas, el psicoanálisis establece un dispositivo formal: la "lógica del significante". Término adoptado de la lingüística estructural, el significante escapa a cualquier significado fijo o previamente establecido. La función del significante no es representar el significado, pues existe más allá de toda significación. Cuando un analista interpreta un sueño, por ejemplo, otorga a ciertos elementos relacionados un mero valor significante. Todo significante remite a otro significante en la cadena lingüística, hecho que Lacan expresa mediante un algoritmo: S1 ◆ S2 (que debe leerse: un significante 1 remite a un significante 2; el primero es único, el segundo es múltiple). De manera que no se puede reflexionar sobre un significante sino

que siempre hay que reflexionar sobre al menos dos. Dicho algoritmo es "el resumen en Lacan de la lógica del significante".[7]

El paso del primero a los demás significantes constituye una *transformación*, en el sentido lógico-matemático. Pero en contraste con las estructuras algebraicas, en las cadenas de significantes no hay identidad sino solamente diferencias. El principio de identidad se suele presentar como una obviedad, asegurando que A = A, pero la lógica con la que trabaja Lacan se asienta en el principio opuesto: A J A, lo cual equivale a postular la *diferencia* en lugar de aquel principio. En su seminario *La lógica del fantasma,* Lacan afirma: "ningún significante, aun cuando fuese reducido a su forma mínima, la letra, sabría significarse a sí mismo".[8] Para probar este aserto, recurre a *topología,* empleando la banda de Möbius y la estructura del "ocho interior".[9]

En la "lógica del significante" no hay transformación idéntica, ni elemento neutro, ni se cumple con la propiedad de clausura o de cierre del sistema, como sucede en las estructuras algebraicas más comunes. Hay razones para esta no-clausura. Mientras que la teoría de conjuntos clásica se define en función de la totalidad de sus elementos (sean finitos o infinitos), la "lógica del significante" se determina por el concepto del *no-todo.* Dado que la dimensión con la que trabaja el psicoanálisis es el lenguaje, a cualquier ser hablante le está vedado decirlo todo. De nada se puede decirlo todo, entre otras cosas porque siempre faltan palabras. Volvemos aquí a las paradojas matemáticas, entre ellas cabe destacar: la paradoja de *todos* los conjuntos, conocida como la paradoja de Cantor; la paradoja de Russell, o del conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos (cuyos ejemplos más conocidos son el catálogo de *todos* los catálogos que no se incluyen a sí mismos y el babero que le corta el cabello a *todos* los hombres que no se lo cortan a sí mismos); la paradoja de Burali-Forti o del conjunto de *todos* los números ordinales, y la paradoja de *todos* los conjuntos equipolentes. Si el conjunto es considerado como un todo completo, entonces se producen inevitablemente paradojas. Una razón más para que la "lógica del significante" se asiente en el no-todo.

Por otro lado, el no-todo remite a la *diferencia,* concepto que no se reduce a una simple notación, como si sólo fuese un asunto de colocar entre dos términos o dos signos el ' J '. En rigor, la *diferencia* no tiene

4783527350981426893456372829648567585959733420928634530394857612325347756503937612345678909876543213425643993847565757511980964554685959

representación, es decir no hay Imaginario para la diferencia: no hay manera de representar (imaginarizar, imaginar) la diferencia en sí misma. Y esto en cualquier plano de la existencia humana. Sean por ejemplo las formas de intolerancia, como el racismo, la xenofobia, el sexismo, el fundamentalismo, que están basadas en modos brutales de eliminar la diferencia. En su modalidad neurótica, supone contradecir la diferencia entre *masculino y femenino*, que no se trata de un rechazo respecto de las variantes de la vida sexual, como es el caso de la homosexualidad, sino en un *no querer saber* (inconsciente) de la diferencia entre géneros, que puede reducirse a denegar lo femenino, rechazo en el que las mujeres no se quedan atrás de los hombres.

Lacan postula la diferencia de lo masculino y lo femenino en términos que no son ni anatómicos, ni fisiológicos ni culturales, sino *estrictamente lógicos*. Empleando lo que denominó "fórmulas de la sexuación", pretende dar cuenta de la diferencia entre una posición masculina y una posición femenina.[10] La elaboración que presenta implica una transgresión a las formas habituales con las que se maneja la lógica cuantificacional. Es un trabajo tan insólito como cautivador.

En síntesis, el recorrido sumario que se ha expuesto permite entrever que hay numerosos temas en los que convergen la lógica y el psicoanálisis. Desde luego, y en congruencia con lo descrito, los temas… no (son) todos.

[1] Sobre el desarrollo de la lógica hasta las teorías paraconsistentes, véase J. Mosterín y R. Torretti, *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*. Alianza Editorial.
[2] Tesis que varios lógicos han sostenido, como es el caso de F. G. Asenjo, N. A. da Costa y otros. Cfr. G. Palau, *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*, cap. 6, Gedisa.
[3] S. Freud, *La interpretación de los sueños*. Obras Completas, Tomo IV, p. 78. Amorrortu.
[4] S. Freud, *Lo inconsciente*, Obras Completas, Tomo XIV, pp. 183-84. Amorrortu.
[5] Sobre este punto, en la teoría formal, véase L. Peña, *Introducción a las lógicas no clásicas*, en particular el capítulo VII. UNAM.
[6] J. Lacan, El seminario, libro XVIII, el 13 de enero de 1971. Inédito.
[7] J-A Miller, 'La lógica del significante', en *Matemas II*, p. 17. Manantial.
[8] J. Lacan, El seminario, libro XIV, el 23 de noviembre de 1966. Inédito.
[9] Véase J. Granon-Lafont, *La topología básica de Jacques Lacan*, Nueva Visión, y también V. Korman, *El espacio psicoanalítico. Freud, Lacan, Möbius*. Síntesis.
[10] Véase J. Lacan, El Seminario, libro XX, *Aun*, pp. 95 y ss. Paidos.

La Aplicación y Algunos Teoremas de Adición para las Funciones Trigonométricas

Jorge Enrique Bauer León
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM

Muchos itamitas se han preguntado de dónde "salen" las identidades trigonométricas que la mayoría de nosotros conoce, como las siguientes:

$$\mathrm{Cos}(\alpha + \beta) = \mathrm{Cos}(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta) - \mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)$$
$$\mathrm{Cos}(\alpha - \beta) = \mathrm{Cos}(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta) + \mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)$$
$$\mathrm{Sin}(\alpha + \beta) = \mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta) + \mathrm{Sin}(\beta)\mathrm{Cos}(\alpha)$$
$$\mathrm{Sin}(\alpha - \beta) = \mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta) - \mathrm{Sin}(\beta)\mathrm{Cos}(\alpha)$$

Para poder demostrar las identidades necesitaremos, primero, demostrar un teorema muy importante de la geometría Euclidiana.

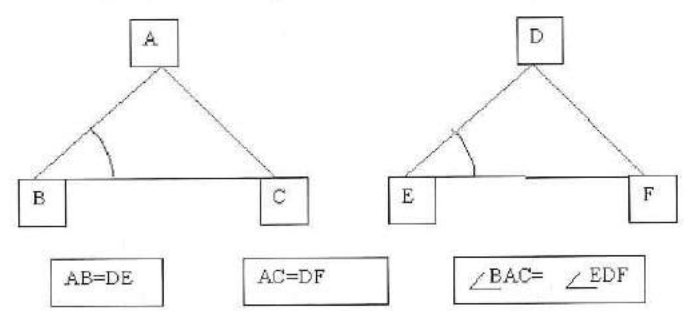
Teorema 1:

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido por tales rectas es congruente (un objeto geométrico es congruente con otro si y sólo si son iguales), entonces los triángulos son congruentes.

Demostración y Procedimiento:

Sean los dos triángulos ABC y DEF, que tienen sus lados AB y AC iguales respectivamente a los lados DE y DF, y el ángulo comprendido por BAC igual al comprendido por EDF.

Fig. 1



Se debe demostrar entonces que la base BC es igual a la base EF, y que el triángulo ABC es igual al triángulo DEF o sea que los demás ángulos correspondientes son también iguales, es decir, el ángulo ABC es igual al ángulo DEF y el ángulo ACB es igual al ángulo DFE. Esto es cierto porque si se coloca o "aplica" el triángulo ABC sobre el triángulo DEF, y se coloca para ello el punto A sobre el punto D y la recta AB sobre la recta DE, entonces quedaran colocados también el punto B sobre el punto E; de ahí que sean iguales la recta AB y la recta DE.

Una vez aplicada la recta AB sobre la recta DE, se aplicará la recta AC sobre la recta DF, por ser el ángulo comprendido por BAC igual al comprendido por EDF; de manera que el punto C se aplicará sobre el punto F, por ser también iguales la recta AC con la recta DF. Pero como ya estaba aplicado el punto B sobre el punto E, luego se aplicará la base BG sobre la base EF. Porque si, estando ya aplicado el punto B sobre el punto E y el punto C sobre el F, la base BC no se aplicara sobre la base EF, dos rectas distintas circundarían una región, lo cual es imposible.

Por lo tanto, la base BC se aplicará sobre la base EF y son iguales; por consiguiente el triángulo entero ABC se aplicará sobre todo el triángulo DEF y será igual a él. Además, los ángulos de uno se aplicarán a los restantes del otro y serán iguales.

En este teorema aparece por primera vez el concepto de aplicación. ¿Qué es una aplicación y bajo qué condiciones es posible efectuarla? Son preguntas que no fueron respondidas de manera explícita por Euclides. Según se puede concluir de sus textos, una aplicación consiste en un movimiento mediante el cual un objeto geométrico se coloca sobre otro, de la misma clase que el anterior, aceptándose que por este movimiento no se alteran ni los tamaños ni las formas de éstos. Así que, si al aplicar un objeto geométrico sobre otro los dos objetos coinciden en todas sus partes, entonces son iguales (o congruentes). Euclides demuestra así el primer teorema de congruencia de triángulos.

Ahora bien, estamos preparados para demostrar las identidades trigonométricas antes mencionadas. Comencemos por demostrar la siguiente identidad:

$$\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(\beta)$$

Para ello, en la figura 2 se han marcado, en el circulo unitario, los ángulos α (equivalente al ángulo SOP) y β (equivalente al ángulo SOQ), de tal forma que el ángulo $\alpha - \beta$ corresponde al ángulo QOP. Las coordenadas de los puntos Q y P son respectivamente (Cos(β), Sin(β)) y (Cos(α), Sin(α))

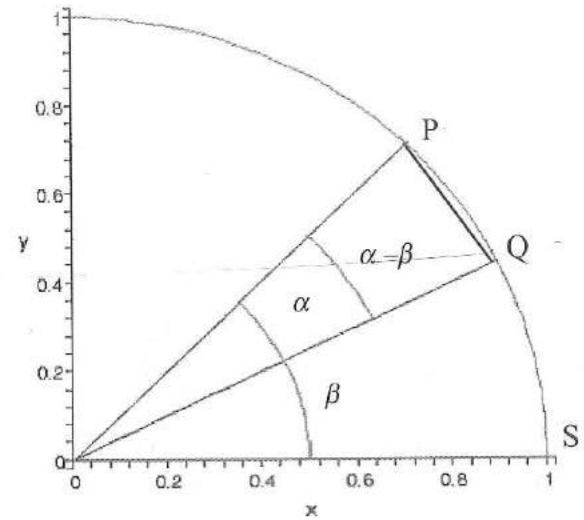


Fig. 2

Si ahora se gira el ángulo QOP de tal forma que el lado OP coincida con el eje x (y por lo tanto el punto Q con el punto S) el punto P queda ubicado en el punto R cuyas coordenadas son: (Cos(α-β), Sin(α-β)).

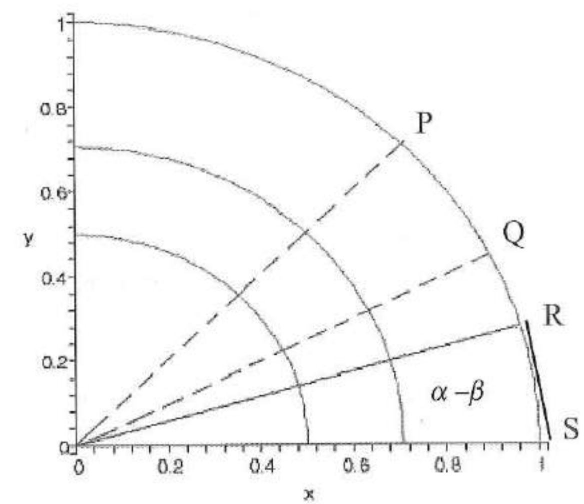


Fig. 3

Como los triángulos QOP y SOP son congruentes, pues son triángulos isósceles con el mismo ángulo central, por el teorema 1, los segmentos QP (de la figura 2) y SR (de la figura 3) tienen la misma longitud. Por la fórmula de la distancia se tiene que:

$(PQ)^2= (\text{Cos}(\alpha) - \text{Cos}(\beta))^2 + (\text{Sin}(\alpha) - \text{Sin}(\beta))^2=$
$2 - (\text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta)+\text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(\beta))$ y $(RS)^2= [\text{Cos}(\alpha-\beta) - 1]^2 +$
$[\text{Sin}(\alpha-\beta) - 0]^2 = 2 - 2\text{Cos}(\alpha-\beta)$

Como PQ=RS, entonces $2 - 2\text{Cos}(\alpha-\beta)= 2 - 2(\text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(\beta)$ de donde se obtiene la identidad que se quería demostrar:
$\text{Cos}(\alpha-\beta)= \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(\beta)$ . . . Q.E.D.

La identidad para el coseno de la suma de dos ángulos es una consecuencia inmediata de esta identidad y del hecho, fácilmente comprobable, de que:

$\text{Sin}(-\alpha) = -\text{Sin}(\alpha)$
$\text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos}(\alpha)$

En efecto, como la identidad que se acaba de demostrar para el coseno de la diferencia de dos ángulos es valida para cualesquiera dos ángulos, se puede tomar el segundo de ellos, como –â, y obtener así:

$\text{Cos}[\alpha -(-\beta)]= \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(-\beta) + \text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(-\beta)= \text{Cos}(\alpha+\beta)$
$= \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) - \text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(\beta)$

Para obtener las fórmulas para el seno de la suma y diferencia de dos ángulos tenemos que:

$\text{Sin}(u+v)= \text{Cos}[(\pi/2)-(u+v)]$ ¿Por qué?
$= \text{Cos}[(\pi/2 - u) - v]= \text{Cos}(\pi/2-u)\text{Cos}(v) + \text{Sin}(\pi/2-u)\text{Sin}(v)$
$= \text{Sin}(u)\text{Cos}(v) + \text{Cos}(u)\text{Sin}(v)$… Q.E.D.

La fórmula para el seno de la diferencia se le deja como ejercicio al lector.

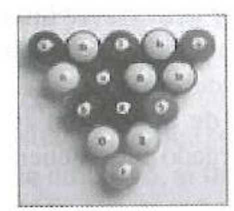
Bibliografia:
THOMAS / FINNEY. "Calculo una Variable". Pearson. Ed. 9 (1998).
LOUIS LEITHOLD. "El Calculo con Geometría Analitica". Harper & Row. (1986).

Las Cuatro Pesas

Sabido es que con cuatro únicas pesas (sólo cuatro) de valores determinados, es posible pesar, en una balanza de platillos y con una sola pesada, cualquier objeto cuyo peso sea un número entero de kilos entre 1 y 40.
a) ¿Cuáles son esas pesas y de qué manera se consigue pesar ese objeto?
b) ¿Cuántas pesas, y de qué valores, serán necesarias para pesar un objeto de 123456 Kg.?
c) El número 123456 no tiene nada de especial, te lo aseguro. Lo interesante es idear un algoritmo que permita determinar qué pesas son necesarias y cómo hay que utilizarlas para pesar un objeto de un número de kilos dado

Bolas de Billar

George Sicherman propuso un complicado problema con 15 bolas de billar, numeradas
1, 2, ... , 15.
¿Será posible construir un triángulo invertido, utilizando todas las bolas, de tal modo que el valor de las bolas inferiores sea la diferencia en valor absoluto de las dos superiores?
Sí, la solución es única. (excluyendo simetrías).
Puedes deducir ciertas condiciones para la fila superior.
Por ejemplo, ¿Pueden ser todos pares?
¿Son posibles todas las configuraciones que incluyan pares e impares?
Por otro lado, piensa en qué fila pueden encontrarse el 1,14,15.



Hablando de créditos hipotecarios

Emma Cristina Conde Flores y
Claudia Pavón Navarrete
Alumnas de Actuaría, ITAM

¿Todos los bancos ofrecen lo mismo? ¿Lo más importante es la tasa de interés? ¿En que me debo de fijar?

En tiempos actuales, muchas familias mexicanas se ven en la posibilidad de solicitar un crédito hipotecario, considerando que la economía presenta una estabilidad que en muchos años no habíamos visto. Esto repercute en tasas de interés que si bien no son muy bajas, tienden a ser accesibles para una parte importante de los mexicanos que buscan con ello afianzar su patrimonio y el de su familia.

Dicha situación es aprovechada al máximo por la banca nacional, ya que en algunos casos se observa un lucro excesivo en el cobro de intereses por créditos hipotecarios en casi todos los bancos que los otorgan. Si a esta situación le aunamos que la mayoría de los funcionarios bancarios que orientan sobre estos préstamos carecen del conocimiento sobre cómo se realizan los cálculos de los intereses que devengan, se traduce en desinformación para sus propios clientes, quienes no cuentan entonces con una base real que les permita elegir el crédito que más les convenga.

En virtud del alto impacto económico que representan estos créditos, decidimos elaborar un análisis matemático de las diferentes alternativas de financiamientos que existen.

1. TASA FIJA CON PAGOS FIJOS

El primer tipo de crédito que ofrecen las instituciones crediticias es el de **tasa fija** con **pagos fijos.** Tomando como parámetros un **plazo de 15 años** y un **préstamo de $375,000.00,** se ofrecen las siguientes alternativas:

· El **Banco A** ofrece el plan con una **tasa de interés del 16.45%**
· El **Banco B** ofrece el plan con una **tasa de interés del 16.29%,** con un programa que favorece a los "Clientes Cumplidos", **condonando la parcialidad 12** y promoviendo con ello el puntual pago del crédito.
· El **Banco C** ofrece una **tasa de interés del 15.5%** y maneja un **bono de devolución del 20%** del crédito otorgado para el cliente al final del plazo (con la liquidación del crédito y adeudo)

El pago se calcula igualando el préstamo al valor presente del flujo de pago utilizando la siguiente formula:

Fórmula:

Pago mensual = <u>Préstamo Otorgado</u>
Á 180

Datos:
Adeudo: $375,000
Plazo: 15 años
Tasa Int.(i): varia según banco

BANCO	Monto Total de los pagos
Banco A	**$1,012,631.40**
Banco B	$947,877.15
Banco C	$895,277.40

Con este esquema, usando la fórmula antes descrita, se consideran 12 pagos al año durante 15 años (15 años X 12 meses = 180 pagos mensuales) y llegamos a la conclusión de que el banco que más favorece a los acreditados es el Banco C. Si consideramos su tasa de interés y el beneficio adicional de bono, resulta ser la opción más viable bajo este esquema ya que se cumple que además de ser la tasa mas baja ofrece las mejores condiciones.

Apesar de tener una mayor tasa de interés, algunos bancos pueden reducir el monto total a pagar por los programas que manejan. Esto refleja que la tasa de interés no es el único factor a tomar en cuenta para decidir cuál es la mejor opción.

2. TASA FIJA CON AJUSTE ANUAL AL PAGO

· El **Banco C** maneja una **Tasa de interés del 13.5%** con un ajuste anual al pago de **2.3%,** aplicando el mismo beneficio del esquema anterior de otorgar un **bono del 20% de devolución** al final del plazo (con la liquidación del crédito y adeudo).
· El **Banco D** maneja una Tasa de interés del **14.09%** con un ajuste al pago de **1.6%,** pero solo se ofrece con **plazo de pago de 20 años.**

En este tipo de esquema, la primera mensualidad se calcula de la misma manera que el primer plan presentado, con la **variante de que el Banco D,** en lugar de calcular una Á 180 lo realiza con una Á 240 teniendo como desventaja para el cliente que la mensualidad se ajusta anualmente con el porcentaje de crecimiento respectivo, lo que da como resultado que todas las mensualidades que se pagan en el Banco C sean mayores que las pagadas en el Banco D. Sin embargo, si **tomamos las premisas de plazo (15 contra 20 años),** además del **bono de devolución,** resulta que el **Banco C sigue sien-**

do la mejor opción, existiendo una **diferencia aproximada total de ahorro de $350,000.00**, lo que significa casi el monto original del crédito.

BANCO	Monto Total de los pagos
Banco C	$958,035.40
Banco D	**$1,305,154.12**

3. **TASA FIJA MESUALIDAD VARIABLE**

Este último esquema solo lo maneja el **Banco E.** Para calcular el monto del pago mensual, primero debe calcularse la tasa mensual a partir de la **tasa de interés anual del 17.90%.** A diferencia de otros bancos, ésta no es una tasa fija ya que el interés que están manejando es diario, por lo que debe calcularse anual entre 360 días, multiplicado por el número de días del mes y por el capital insoluto. Por otro lado se calcula el interés mensual que se obtiene de la tasa anual entre 12 meses, por el capital insoluto, lo que da una mensualidad promedio de $6,012.12. Lo que se concluye es que dicho banco maneja una tasa de interés diaria manejada por el banco (que al año suman 360 días) y una amortización mensual basada en una mensualidad promedio, lo que provoca que se generen mayores intereses (situación que no se le aclara al cliente), no siendo este plan la mejor opción. Este tipo de situaciones que suenan muy complejas para casi cualquier persona son las que ocasionan tomar malas decisiones al querer elegir un buen crédito hipotecario.

BANCO	Monto total de los pagos
Banco E	$1,090,854.40

CONCLUSIONES:

Con este análisis hemos llegado a la **conclusión de que una baja tasa de interés no es garantía de que el monto a pagar al final del crédito sea el que más nos conviene**, ya que habría **que tomar otros parámetros de suma importancia como son los beneficios adicionales,** tal como ***la mensualidad 12 por cuenta del banco o la devolución del 20% del crédito al final del plazo*****, que en muchos de los casos hacen la gran diferencia** entre un crédito y otro. Una buena elección de estos factores puede significar tener sustanciales ahorros que beneficien directamente al acreditado, sin dejar de considerar otros parámetros como el plazo del crédito o los ajustes anuales de mensualidad. Resulta importante recalcar que la mayoría de los bancos buscan una combinación de todos estos elementos para obtener el mayor beneficio para ellos, por lo que **es importante que el cliente conozca la forma del cálculo de los intereses para su pago mensual en los diferentes tipos de planes, así como el beneficio adicional que algunos bancos ofrecen, lo que puede dar la pauta *de pagar mucho, pero mucho dinero menos por un crédito igual.***

Congreso Anual de la Sociedad Matemática Mexicana

El XXXVII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana se llevó a cabo durante la semana del 10 al 15 de Octubre en el bello puerto de Ensenada . La institución anfitriona fue la Universidad Autónoma de Baja California campus Ensenada. Este congreso contó con 534 pláticas enmarcadas en 21 áreas y 72 pláticas correspondientes a 10 sesiones especiales. También hubo una sesión de carteles, 5 conferencias plenarias y 5 magistrales, 3 pláticas de vinculación; se presentaron 7 libros de matemáticas y 4 trabajos en proyección de videos. Cabe agregar que 12 instituciones presentaron su posgrado y 5 editoriales expusieron su material. Durante este congreso se realizó un homenaje póstumo a Alberto Barajas, Víctor Neumann y Janusz Charatonik. El congreso, como es usual, abarcó áreas de investigación en matemáticas, enseñanza, cursos para maestros de matemáticas y para estudiantes también. Participaron estudiantes y expositores de todo el país. ¡Enhorabuena Ensenada! fue un placer colaborar con ustedes. Gracias por todo su apoyo, trabajo y esfuerzo.

Sociedad Matemática Mexicana

Reseña del 19 Foro Nacional de Estadística

El Foro Nacional de Estadística es un evento anual en donde académicos, trabajadores de la industria y estudiantes se reúnen para presentar y discutir nuevos métodos y aplicaciones estadísticas. Este año, el foro tuvo lugar en el centro estudiantil del Tecnológico de Monterrey Campus Monterrey. El foro tuvo una asistencia de alrededor de 200 personas con una participación considerable (40%) de estudiantes tanto de licenciatura como de postgrado. El programa académico estuvo formado por 5 conferencias magistrales impartidas por distinguidos investigadores nacionales y del extranjero, así como directores y subdirectores de áreas técnicas de la iniciativa privada. Hubo 2 cursos, uno de Análisis de Riesgos Financieros y otro de Selección de Modelos Mercadológicos. En total, se presentaron 46 contribuciones libres y 20 carteles de diversos temas tanto teóricos como aplicados.

En general se puede decir que el foro 19 cumplió con éxito sus objetivos tomando en cuenta que la ciudad de Monterrey y las instalaciones del Tecnológico formaron una atmósfera idónea para el intercambio de conocimiento e ideas.

Luis E. Nieto Barajas
ITAM

El Problema de las Ocho Reinas

Fue propuesto por primera vez en 1848 por Max Bezzel, quién preguntó '¿Cuál es el mayor número de reinas que se puede ubicar en un tablero de ajedrez de modo de que ninguna sea atacada por ninguna otra?'

Objetivo: Ubique todas las piezas en un tablero de 8x8 de modo de que no haya dos círculos en la misma hilera, columna o en diagonal. Como ejemplo, la figura de la derecha muestra situaciones incorrectas, pues los círculos se encuentran en la misma diagonal.