Soluciones Zona Olímpica #46

Problema 1

Enunciado

Se suman los dígitos del producto

$$1 \times 2 \times \cdots \times 2018.$$

Se vuelven a sumar los dígitos del número resultante y así hasta obtener una sola cifra ¿cuál es?

Solución

Se sabe que un número es divisible entre 9 si y sólo si la suma de todos sus dígitos es divisible entre 9 también. Como 2018! es múltiplo de 9, entonces la suma de sus dígitos también lo es. Repitiendo este proceso, concluimos que el dígito restante será 9, pues es el único número de una cifra diferente de 0 que es múltiplo de 9.

Problema 2

Enunciado

Sea A una matriz cuadrada de tamaño n con entradas complejas. Se dice que A es hermitiana si y solo si

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

Demuestra que para cualquier matriz cuadrada compleja M existen matrices A, B hermitianas tales que

$$M = A + iB.$$

Solución

Recordemos las funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$:

$$Re(z) = Re(a + bi) = a = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$Im(z) = Im(a + bi) = b = \frac{z - \bar{z}}{2}.$$

De manera análoga, definimos $A = \dfrac{M + \bar{M}^T}{2}$ y $B = \dfrac{M - \bar{M}^T}{2i}$. Se sigue que $A + iB = M$ y también que $\bar{A}^T = A$, $\bar{B}^T = B$, por lo tanto A y B son las matrices hermitianas buscadas.

Problema 3

Enunciado

Prueba que en cualquier reunión (finita) de gente, hay al menos dos personas que conocen al mismo número de gente. Suponga que si la persona A conoce a la persona B eso implica que B conoce a A (la relación es reflexiva).

Solución

Supongamos que hay n personas en la reunión. Cada persona puede conocer desde 0 hasta $n-1$ personas diferentes (no contamos que una persona se conozca a sí misma). Suponiendo que existe alguien que conoce a 0 personas, entonces no puede existir alguien que conozca a $n-1$ personas, y viceversa, pues la relación es reflexiva. Por lo tanto, cada persona puede conocer a una cantidad de personas que va desde 0 hasta $n-2$ o desde 1 hasta $n-1$, en ambos casos, por El Principio del Palomar, se concluye que al menos dos personas conocen a la misma cantidad de gente.

Problema 4

Enunciado

Prueba que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

converge.

Solución

Es claro que la sucesión es creciente (pues la función raíz cuadrada es creciente y siempre es positiva). Para ver que es acotada, factorizaremos $\sqrt{2}$ de a_n y consideremos la sucesión auxiliar $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{4}+\sqrt{\frac{3}{8}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}}} \\ &< \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}} = \sqrt{2}b_n. \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que la sucesión b_n está acotada superiormente por 2 vía inducción matemática. Primero, observamos que $b_1 = 1 < 2$, con lo que tenemos el caso base. Supongamos ahora que $b_n < 2$, entonces se tiene que

$$b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n} < \sqrt{1 + 2} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Por lo tanto, b_n está acotada por 2 y a su vez, a_n lo está por $2\sqrt{2}$. Como a_n es creciente y acotada por arriba, entonces es convergente.

Problema 5

Enunciado

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Para $x \in \mathbb{R}$ se define

$$g(x) = 2f(x) \int_0^x f(t)dt.$$

Demostrar que si $g(x)$ es no creciente en todo $\mathbb{R}$, entonces f es idénticamente 0 para toda x.

Solución

Definimos la función auxiliar $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \left(\int_0^x f(t)dt \right)^2$. Se tiene entonces que $G'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t)dt$.

Como $G'(0) = 0$ y $G'(x) = g(x)$, donde g es no decreciente, concluimos que G' es no negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y no positiva en $(0, \infty)$. Esto quiere decir que G es no decreciente en $(-\infty, 0)$ y no creciente en $(0, \infty)$. Juntando el hecho de que $G(0) = 0$ y que $G(x) \geq 0$ para toda x, entonces concluimos que $G \equiv 0$. Esto implica que $\int_0^x f(t)dt = 0$ para toda x y por el Teorema Fundamental del Cálculo, derivamos y concluimos que $f \equiv 0$.

Problema 6

Enunciado

Sean a y b números reales tal que

$$9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6.$$

Prueba que $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

Solución

Supongamos lo contrario, esto es

$$7a + 5b + 12ab > 9.$$

Entonces

$$9a^2 + 8ab + 7b^2 - (7a + 5b + 12ab) < 6 - 9.$$

Se sigue que

$$2a^2 - 4ab + 2b^2 + 7\Big(a^2 - a + \frac{1}{4}\Big) + 5\Big(b^2 - b + \frac{1}{4}\Big) < 0.$$

O equivalentemente,

$$2(a-b)^2 + 7\Big(a - \frac{1}{2}\Big)^2 + 5\Big(b - \frac{1}{2}\Big)^2 < 0.$$

Lo cual es una contradicción y se sigue el resultado.