GRUPO INFFINIX

Exportamos tecnología,
¡Únete al equipo de trabajo!
- Matemáticos
- Ingenieros
- Actuarios

Grupo Inffinix
J. M. Castorena 283, piso 1, C.P. 05000
Cuajimalpa, México, D.F.
(55) 5813-1325

www.inffinix.com
talento@inffinix.com

Índice

Consejo Académico
Claudia Gómez Wulschner
Mauricio López Noriega
Gustavo Preciado Rosas

Consejo Editorial

Dirección
María Guadalupe González Llama

Relaciones Públicas
Lorelei Ramírez Reyes Brito
Ana Cecilia Zenteno Langle

Diseño
Gabriela Otero Zorrilla
J. David Lampón Ortega
J. Ezequiel Soto Sánchez

Editores
Vanessa Rodríguez Munguía
Armando Álvarez Govela

Publicidad
Susana Becerra Atamoros
Ana Lourdes Gómez Lemmen Meyer

Sección "El sendero del Paseo"
Ariadna Trapote

Página de Internet
Alberto Alcocer Medina Mora

Colaboradores
Carlos Ramírez Rosales
Alejandro Jardí

Editorial

Reloj (3x2+1)

(1) No me decido, exhalo… Lloran su ausencia. Amanece en Japón. Invierno en el norte, verano en el sur. El humo de un cigarro, afoco: gotas, comienza a llover… (2) Un sorbo al café.

Cuarto menguante, otra noche fría, un punto final. Parece que hará frío, 192 despertadores y la alarma de un coche. Responde, preguntan. Mi mente en blanco… (3) Quema, cae sobre la mesa… (4)… (5) Parpadeo. ¿Subió la marea? 183 despiertan. La ciudad: tráfico, vendedores…sube el vidrio.

(6) Inhalo, aún no sé (quiero dormir). Prende el radio. Recuerdos que invaden la memoria. Aplasta la colilla y el humo se escapa… (7) Un segundo más…

http://laberintos.itam.mx
laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx

En la portada: *Cristal*, Jesús J. Ortega Calzada
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM
jesusjortegac@hotmail.com

La vida sin la regla de L'Hôpital

Dr. Guillermo Grabinsky Steider
Departamento de Matemáticas, ITAM.
ggrab@itam.mx

Marqués de L'Hôpital

Un viejo consejo atribuido a Jerry Kazdan [1] reza así: "Si estás atorado con un problema de Cálculo y no sabes que hacer, trata de integrar por partes o cambiar de variables", lamentablemente a este buen consejo se ha agregado otro: "Si no sabes cómo calcular un límite, usa la regla de L'Hôpital". Esta regla le fue comunicada a Guillaume-François-Antoine, Marqués de L'Hôpital (1661–1704) por primera vez en 1694 en una carta por Johann Bernoulli su tutor privado, y apareció en el libro "Analyse de Infiniment Petits" [2] reconocido como el primer texto de Cálculo, desde entonces esta útil regla se ha usado, abusado y mal usado y al parecer es el único recurso con el que cuentan algunos alumnos para intentar obtener ciertos límites, algunos de los cuales ni siquiera se pueden deducir a partir de la regla aunque ésta pueda aplicarse, como por ejemplo los límites de

$\dfrac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $\dfrac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x-1}$ cuando x tiende a cero o de $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta}$ cuando θ tiende a $\dfrac{\pi}{2}$.

Cada uno de ellos puede obtenerse fácilmente por otros medios.

El propósito de esta nota es mostrar que muchos límites importantes y de uso frecuente pueden establecerse de manera elemental mediante el uso de desigualdades, cambios de variable, propiedades básicas de funciones y a partir de los primeros términos de algunas series de Taylor.

En casi cualquier texto de Cálculo se define a la función logaritmo natural, ln, como el área bajo la gráfica de $1/t$ (p.458 de [3]), comparando tal área con las que se obtienen de otras gráficas deducimos nuestro primer resultado que nos dice que ln tiende a infinito (esto sí lo supondremos) muy lentamente.

Ejemplo (1)

Para cualquier $\beta>0$ se tiene que: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{\beta}} = 0$.

Demostración:

Dado que $\sqrt{t} \leq t$ si $t \geq 1$ se tiene que para toda $x \geq 1$:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\left(\sqrt{x}-1\right) < 2\sqrt{x}$$

por lo que:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Haciendo uso del Teorema del emparedado (p.64 de [3]) se sigue que: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, esto establece el caso $\beta=1$. El caso general se sigue si ponemos $w = x^{\beta}$, entonces como $\beta>0$, $x\to\infty \Leftrightarrow w\to\infty$ por lo que: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{\beta}} = \dfrac{1}{\beta}\lim_{w\to\infty} \dfrac{\ln(w)}{w} = 0$. □

En el otro extremo del dominio de ln tenemos el siguiente:

Ejemplo (2)

Para cualquier $\beta>0$ se tiene: $\lim_{t\to 0^+} t^{\beta}\ln(t) = 0$.

Demostración:

Sea $x = 1/t$, entonces $t\to 0^+ \Leftrightarrow x\to\infty$, así pues:

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\beta}\ln(t) = \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln(x)}{x^{\beta}} = 0. \ \square$$

Poniendo $\beta=1$ y usando la continuidad de la función exponencial obtenemos $\lim_{t\to 0^+} t^t = \lim_{t\to 0^+} \exp(t\ln t) = \exp(0) = 1$.

[redacted]

Continuando con la lentitud de crecimiento de ln tenemos el:

Ejemplo (3)

Para cada $\beta>0$, $\lim_{t\to\infty} \dfrac{(\ln(t))^{\beta}}{t} = 0$.

Demostración:

Sea $m\in\mathbf{N}$ tal que $\beta < m$, entonces para $t \geq e$:

$$0 \leq \frac{(\ln(t))^{\beta}}{t} \leq \frac{(\ln(t))^{m}}{t} = \left(\frac{\ln(t)}{t^{1/m}}\right)^{m} = \left(\frac{m\ln(t^{1/m})}{t^{1/m}}\right)^{m} = \left(m\frac{\ln(x)}{x}\right)^{m} \quad \text{con} \quad x = t^{1/m} \quad \text{y}$$

como $x\to\infty \Leftrightarrow t\to\infty$ el resultado se sigue del Teorema del emparedado y el ejemplo (1). □

A continuación un resultado sencillo:

Ejemplo (4)

$\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Demostración:

Este límite es inmediato en el instante que lo identificamos como la derivada de $\ln(x)$ en $x_0 = 1$. □

Si escribimos $x = 1 \pm ah$ $(a\neq 0)$, entonces de (4) se sigue el **Ejemplo (5)**:

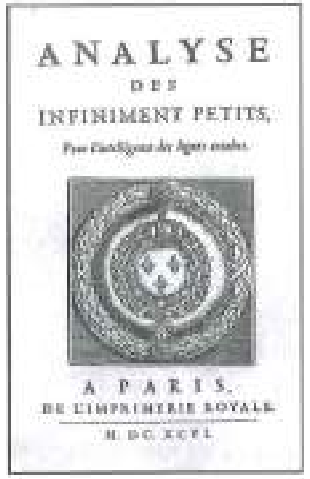
$\lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(1\pm ah)}{h} = \pm a$, el cual usamos enseguida para deducir un límite fundamental:

Ejemplo (6)

$\lim_{t\to\infty} \left(1 \pm \dfrac{a}{t}\right)^{bt} = e^{\pm ab}$, para cada $a,b\in\mathbf{R}$ $(a\neq 0)$

Demostración:

Como $\left(1\pm\dfrac{a}{t}\right)^{bt} = \exp\left(bt\ln\left(1\pm\dfrac{a}{t}\right)\right)$ y dado que la función exponencial es continua, es suficiente probar que $\lim_{t\to\infty} bt\ln\left(1\pm\dfrac{a}{t}\right) = \pm ab$, lo cual se sigue del Ejemplo (5) poniendo $t=\frac{1}{h}$. □


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

Portada del primer libro de Análisis Matemático editado por el marqués de L'Hôpital

Un ejemplo similar es el siguiente:
Ejemplo (7)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x+d}\right)^x=e^{c-d}\qquad (c,d\in \mathrm{R}).$$

Demostración:
Escribimos:

$$\left(\frac{x+c}{x+d}\right)^x=\left(\frac{x+d+c-d}{x+d}\right)^x=\left(1+\frac{c-d}{x+d}\right)^x=\left(1+\frac{c-d}{w}\right)^w\left(1+\frac{c-d}{w}\right)^{-d}$$

donde $w=x+d$. Como $w\to\infty\Leftrightarrow x\to\infty$ y el segundo factor tiende a 1 si $w\to\infty$, obtenemos el resultado aplicando el Ejemplo (6) al primer factor. □

A continuación el desquite de la exponencial:
Ejemplo (8)
Para cada $\alpha>0$ y $\beta\in\mathbf{R}$, $\lim_{x\to\infty}x^\beta e^{-\alpha x}=0$
Demostración:

Sea $t=e^x$ entonces $x=\ln(t)$ y por el Ejemplo (3) $\lim_{x\to\infty}x^\beta e^{-\alpha x}=\lim_{t\to\infty}\frac{(\ln(t))^\beta}{\alpha t}=0$. □

La función logaritmo reaparece en el siguiente.
Ejemplo (9)

Sean a y b positivos y distintos, entonces $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$
Demostración:

Si c es positivo y distinto de 1, entonces $\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}=\ln(c)$ pues es la derivada de

$c^x=\exp(x\ln(c))$ en $x_0=0$, el resultado general se sigue al tomar $c=\frac{a}{b}$ y multiplicar por b^x que tiende a 1. □

El siguiente es un límite trigonométrico muy popular en los textos de Cálculo.
Ejemplo (10)

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{1}{\theta}\right)=0$$

Demostración:
Partimos de las desigualdades clásicas usadas para obtener el límite trigonométrico básico $\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$ [3], a saber: $1\le\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\le\frac{1}{\cos\theta}$ si $\theta\in(0,\pi/2)$, de ellas se sigue:

$\frac{1}{\theta}\le\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\le\frac{1}{\theta\cos\theta}$ de donde

$$0\le\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{1}{\theta}\le\frac{1-\cos\theta}{\theta\cos\theta}=\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\le\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

para el caso $\theta\in(-\pi/2,0)$ intercambiamos θ por $-\theta$ y usamos que $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$ son impares para obtener: $\tan\theta\le\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{1}{\theta}\le 0$ de las dos desigualdades se sigue que:

$\left|\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{1}{\theta}\right|\le|\tan\theta|$ si $0<|\theta|<\pi/2$ y de ahí el resultado. □

Una gran variedad de límites interesantes surgen si se examinan los primeros términos de la serie de Taylor de algunas funciones, por ejemplo, alrededor de $\theta_0=0$:

$\operatorname{sen}(\theta)=\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+o(\theta^3)$ donde el término $o(\theta^3)$ es tal que $\lim_{\theta\to 0}\frac{o(\theta^3)}{\theta^3}=0$ (ver [4])

por lo que $\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)-\theta}{\theta^3}=-\frac{1}{3!}$. Análogamente alrededor de $x_0=0$,

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ por lo que: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$. Límites más sofisticados se obtienen combinando límites ya conocidos.

Finalmente si regresamos al principio de esta historia y al primerísimo ejemplo de L'Hôpital: $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ $(a > 0)$ (año 1696) [2] aquí parece ocioso buscar un método heróico distinto al de la regla de L'Hôpital. El lector curioso puede verificar que la regla es aplicable y tras de emplearla, obtener $\frac{16}{9}a$. Si la regla ha de usarse apelo por último, al sabio consejo que le da Figaro al Conde Almaviva en el "Barbero de Sevilla", éste es: "signor, giudizio per carità".

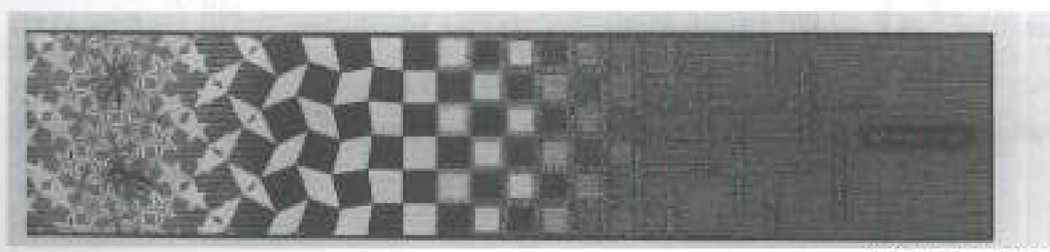
Bibliografía

[1] *Cálculo Vectorial,* Jerrold, E. Marsden y Anthony J. Tromba. Cuarta edición. Editorial Addison, Wesley, Longman de México. 1998. pp. 351

[2] *Analyse de infiniment petits, pour l'intelligence de lignes courbes*, Estudio introductorio, traducción y notas Dr. Rodrigo Cambray N. Primera edición. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias. México 1998. Sección IX Apartado 164, Ejemplo 1. pp. 260 - 261

[3] *Cálculo de una variable*, George B. Thomas y Ross L. Finney. Novena edición. Editorial Addison, Wesley, Longman de México. 1998.

[4] *Calculus*, Tom M. Apóstol. Volúmen 1. Editorial Reverté S.A. España 1982. pp.350 - 370



Metamorph 1, Escher

¿Águila o Sol?

Ganador del primer lugar en el I Concurso de Ensayo de Matemáticas Aplicadas

Jorge Alejandro Carrillo Ugalde
Licenciatura en Matemáticas, UAM
ahojmx@yahoo.com.mx

En toda relación amorosa es sano tomar una decisión de manera democrática, tarea que en ocasiones es muy difícil, por ejemplo, ella quiere ir de compras y él quiere ir al cine. Para evitar un conflicto un volado ayuda a tomar una decisión.

A pesar de las ventajas de un volado, surge un problema: ¿Cómo sabemos que la moneda es confiable? Para resolver la interrogante introduciremos un nuevo concepto: *El volado mental,* el cual permite tirar un volado perfecto sin hacer uso de una moneda.

Para facilitar nuestra explicación supongamos que Alicia y Beto tirarán un volado mental. El volado mental empieza cuando Alicia y Beto tiran una moneda al aire en su mente y se imaginan el resultado. Posteriormente cada uno escribe en una hoja de papel el dígito *0* si el resultado es *águila*, o *1* si es *sol*. Cada uno dobla cuidadosamente su hoja de papel e intercambian los resultados al mismo tiempo.

Para decidir quien ganará el volado Alicia pregunta: "¿águila o sol?". Una vez que Beto decide, abren las hojas de papel y conociendo ambos dígitos deciden el resultado final de la siguiente manera: si en las dos hojas se encuentra el mismo dígito, entonces el resultado es águila y en caso contrario será sol[1].

El volado mental tiene la cualidad de que es imposible hacer trampa: si Alicia deseara que el resultado fuera sol no bastaría con escribir en el papel el dígito *1*, ya que desconoce qué dígito escogerá Beto, en tanto, si Beto escribe *1* entonces el resultado del volado será *0*, es decir, águila. Y aún más: dado que el dígito que escogen es guardado no pueden cambiar de opinión para modificar el volado.

[1] La operación que hace Alicia y Beto lleva el nombre de *suma módulo 2*.

En el volado mental que acabamos de describir, al igual que en el volado tradicional, Alicia y Beto tienen que estar en el mismo tiempo y lugar físico. Dicha suposición parece evidente, ultimadamente, cuando tiramos un volado lo hacemos cara a cara. Sin embargo qué pasa si queremos tirar un volado a distancia.

Tirar un volado a distancia es más útil de lo que parece: supongamos que Beto ganó el volado mental pero Alicia se siente triste por saber que Beto no era un caballero como para ceder un poco. Decepcionada opta por irse de viaje a Europa.

Mientras ella está de viaje, Beto se entera que ganaron un premio. ¿Quién se quedará con él? El único medio de comunicarse es a través de un teléfono convencional: Beto llama a Alicia, la pone al tanto del premio y le pregunta: "¿águila o sol?" Una vez que Alicia escoge Beto contesta: "¡Que lástima!, has perdido y me quedaré con el premio". Seguramente Alicia no estará convencida: ¿Cómo puede estar segura de que verdaderamente ella perdió? Pero, por otro lado, tampoco quiere regresar sólo para echar el volado.

Esta situación pudiera parecer imposible de resolver, sin embargo, las matemáticas proveen una solución.

Para facilitar nuestra explicación requeriremos saber que cualquier número entero positivo se expresa de manera única como producto de números primos, en donde un número primo es aquel número mayor a 1 y cuyos únicos divisores son el *1* y él mismo. Una forma de saber si, por ejemplo, el número *12* es un número primo es factorizándolo. Si uno de los factores es mayor que *1* y menor que *12* entonces el número claramente no es primo. En nuestro caso 12= 2*2*3 y por lo tanto no es primo. Por otro lado si obtenemos la factorización del número *11* tenemos que ésta es *11=11*. Observemos que si la factorización de cualquier número entero positivo n es n entonces podemos afirmar que n es un número primo con 100% de certeza.

Es importante resaltar que *hasta el momento* nadie sabe cómo factorizar cualquier número en un tiempo razonable. Para convencerse de la problemática trate de determinar si 34324325453421 es un número primo o

no encontrando su factorización.

Aunque existen algoritmos para factorizar un número[2] hasta la fecha no se sabe si factorizar cualquier número es o no es un problema *difícil*. Mucha gente se ha puesto a trabajar para encontrar un procedimiento rápido utilizando una computadora digital pero nadie ha tenido éxito. Y aún más, nadie ha demostrado si existe o no un procedimiento eficiente para hacerlo[3].

Por lo tanto, si la única manera para saber si un número es primo o no es a través de su factorización entonces también sería computacionalmente difícil saber si n es primo o no.

Afortunadamente éste no es el caso: a finales de los 70's se mostró que para determinar si un número es primo no era necesario factorizarlo. El procedimiento conocido como *test de primalidad,* fue el inicio de una nueva manera de solucionar problemas. En esta ocasión uno contesta a la pregunta: *¿Es n un número primo?* con cierta incertidumbre, es decir, existe una pequeña probabilidad de que nos estemos equivocando. Si uno repite varias veces el mismo test de primalidad con diferentes parámetros la probabilidad de error se hace cada vez más pequeña, sin embargo jamás desaparece.

El hecho de que hasta el momento factorizar sea un problema computacionalmente difícil de resolver, mientras que determinar si un número es primo o no, es una tarea fácil, es la base de nuestro volado telefónico y de otras aplicaciones que son de gran utilidad en nuestro mundo moderno.

Para facilitar nuestra explicación utilizaremos la notación de congruencias que fue introducida por el célebre matemático Gauss. Dados a, b dos enteros y n un entero positivo escribimos $a \equiv b \bmod n$ cuando n divide a $(a - b)$, es decir, $a - b = nq$ para algún entero q. Por ejemplo $0 \equiv 324232 \bmod 2$ y $2 \equiv 7 \bmod 5$.

Una versión **simplificada** del volado telefónico que Beto debió de haber usado para ver quién se quedaba con el premio sin que Alicia dudase de él es, a grandes rasgos, como sigue:

[2] Dado un número n, verifique si p divide a n, en donde p es un entero mayor que 1 y menor que n. Si no existe tal p entonces n es primo.
[3] Si fuera posible construir una *computadora cuántica*, factorizar un entero no es problema. Aunque dicha máquina en principio puede existir, todavía no ha sido posible hacerlo.

1. Alicia escoge dos números primos p, q distintos muy grandes, es decir, Alicia genera un par de números al azar y utiliza el test de primalidad para decidir si son números primos.
2. Alicia calcula $n=pq$ y le envía n a Beto.
3. Beto escoge un número r al azar menor que n/2 y calcula $z \equiv r^2 \bmod n$.
4. Alicia calcula las raíces de $z \bmod n$ y adivina qué raíz pudiera ser r. Su decisión se la avisa a Beto.
5. Beto determina el resultado del volado: si Alicia adivinó entonces Beto perdió el volado.

Para verificar el resultado del volado Beto le envia el número r y Alicia le envía los dos primos que escogió.

A pesar de que en este volado las probabilidades de éxito para Alicia y Beto son distintas, debido a lo cual no es un volado "justo", no profundizaremos en los detalles técnicos de éste por quedar fuera del alcance del presente trabajo, pero sí aprovecharemos para hacer varias observaciones con la finalidad de motivar el interés en el estudio de las matemáticas tanto puras como aplicadas, así como para ilustrar cómo éstas tienen muchos problemas *nuevos* por resolver todavía.

El primer punto a tratar es: *¿Cómo se genera un número aleatorio impredecible?* Es claro que si tenemos un par de secuencias de números: 2, 4, 6, 8,.... y 123, 412, 1, 554,.... Diríamos que la segunda secuencia de números es "*más*" aleatoria que la primera. Sin embargo, ¿qué tan aleatoria es la segunda cadena? y aún más ¿Cómo generar un número al azar? Estas interrogantes han sido parcialmente resultas pero todavía hay mucho más por hacer[4].

Si suponemos que somos capaces de generar números al azar la siguiente pregunta es: ¿Cuántos números al azar se necesitan para encontrar un par de números primos? La respuesta fue dada por Gauss y lo increíble es que después de algunos intentos hay una gran probabilidad de que nos encontremos un par de números primos.

Un aspecto mucho más sutil se refiere al cálculo de $z \equiv r^2 \bmod n$. En el volado es indispensable que tanto n como r sean números grandes. Si calculamos r^2 como nos

[4] El uso de las computadoras cuánticas generan verdaderos números aleatorios. Como vemos, las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de una computadora son de gran relevancia. Aquí la mecánica cuántica contribuye con nuevos fenómenos que no existen en la mecánica clásica.

enseñaron en la primaria y después dividimos como nos enseñaron en la secundaria para determinar el residuo z, seguramente nos tomará muchísimo papel y tiempo.

Actualmente existen algoritmos eficientes para realizar dicho cálculo pero el hecho de que existan no significa que todo el trabajo esté hecho, por lo que surge la siguiente duda: ¿Existirá un mejor algoritmo?, ¿será posible que exista un mejor algoritmo? Claramente en matemáticas una respuesta como: "Creo que sí" es totalmente inadmisible por lo que requerimos de un argumento lógico que nos ayude a formular nuestra aseveración.

Hemos hablado sobre operaciones que son fáciles de calcular y otras que no lo son, esto no es una coincidencia, la función $z \equiv r^2 \bmod n$ pertenece al grupo de funciones que lleva el nombre de: *funciones de un solo sentido con puerta trasera.* Esta clase de funciones tienen la propiedad de que calcular la función en un sentido es muy fácil (computacionalmente hablando) pero determinar la imagen inversa de un elemento es muy difícil a menos que se conozca información adicional (ésta es la puerta trasera). En nuestro caso, calcular las raíces de z *parece ser* una tarea difícil, sin embargo, si se conoce la factorización de n entonces encontrar las raíces de z no es problema.

Como hemos visto un volado por teléfono requiere de mucho trabajo, tanto matemático, como computacional. Las funciones de un solo sentido con puerta trasera tienen una aplicación no sólo en los volados sino que son el fundamento de las funciones *criptográficas.*

El uso de las funciones criptográficas tiene aplicaciones diversas como: tirar un volado a distancia, ocultar el contenido de un mensaje, realizar transacciones comerciales a través de Internet, firmar un documento digital, comprobar que un documento digital no ha sido alterado, controlar el acceso a la información, entre muchas más.

Así como en la criptografía, las matemáticas son una pieza crucial en el pensamiento humano y han sido iniciadas por viejos problemas de la antigüedad. Sin embargo ello no significa que estén muertas, o sean obsoletas: problemas de hace 2,000 años siguen mostrándonos nuevos secretos.

Exclusiones de Golomb a los modelos matemáticos

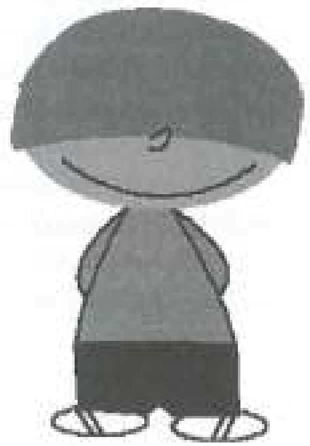
1-No crea en las consecuencias de 33er orden a un modelo de 1er orden.
Lema publicitario: «Cum grano salis».

2. No extrapole más allá de la región indicada.
Lema publicitario: «No se pase de la raya».

3. No aplique ningún modelo hasta que no entienda los supuestos simplificados sobre los que se fundamenta y compruebe que es aplicable.
Lema publicitario: «Utilícese según las indicaciones».

4. No crea que el modelo es la realidad.
Lema publicitario: «No coma el menú».

5. No distorsione la realidad para que se ajuste al modelo.
Lema publicitario: «El Método Procusto».



6. No se limite a un solo modelo. Emplear más de uno puede ser útil para entender los distintos aspectos de un mismo fenómeno.
Lema publicitario: «Legalización de la poligamia».

7. No defienda un modelo desprestigiado.
Lema publicitario: «No pida peras al olmo».

8. No se enamore de su modelo.
Lema publicitario: «Pigmalión».

9. No aplique la terminología del Tema A al Tema B si no es para enriquecer alguno de los dos.
Lema publicitario: «Renovarse o morir».

10. No piense que ha destruido un demonio sólo porque le ha puesto nombre.
Lema publicitario: «Rumpelstiltskin».

Elvis

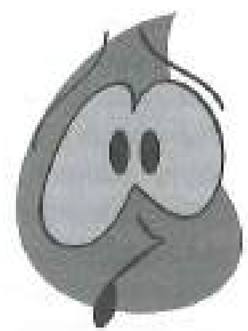
Elvis quiere que lo inmortalicen representado en una escultura de 15 metros de altura. El escultor le muestra un diseño y Elvis acepta. El costo del material es de $20 000.

En la tarde Elvis piensa que es demasiado caro y pide al escultor que realice el mismo diseño pero con la mitad de la altura. ¿Cuánto debe cobrar el escultor por el material? (*Si tu respuesta es $10 000, estás equivocado).

La casita

Un señor manda cubrir una habitación rectangular con loseta. En las orillas ha puesto sólo losetas de color verde que suman 54, el resto es loseta amarilla que suma 66 piezas. En total son 120 losetas. ¿Cuántas losetas tiene cada lado de la habitación?

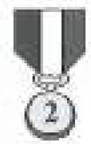
Los lirios



El lirio silvestre se reproduce en un lago duplicándose diariamente. Si partimos de una sola planta, al día siguiente serán dos, al tercero, cuatro, y así sucesivamente hasta llenar el lago al vigésimo día. Si inicialmente partimos de dos lirios, ¿en cuántos días se llenará la mitad del lago?

Matemáticas Aplicadas a la Vida Cotidiana y otros Lugares Inesperados

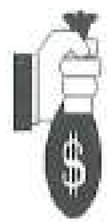
Ganador del segundo lugar en el I Concurso de Ensayo de Matemáticas Aplicadas



Alberto Vargas Mendoza
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM
alberto_vargas@yahoo.com

No se requiere de un gran poder deductivo para concluir que existe una aversión generalizada hacia las matemáticas. La gran mayoría de los alumnos de preparatoria y de licenciaturas en ciencias sociales y humanidades experimentan las clases de matemáticas como entes completamente ajenos a sus vidas cotidianas y a sus futuros profesionales. Quizá la frase más escuchada por los profesores de estas clases es: "¿Y eso para qué me va a servir?" El problema no radica en que el estudiante no conozca las aplicaciones de las matemáticas en ese momento, sino que lo más probable es que pase el resto de su vida sin conocerlas. El propósito de este escrito es presentar una serie de ejemplos de posibles aplicaciones a situaciones de la vida cotidiana, así como a disciplinas que tradicionalmente se han considerado como ajenas al mundo de las matemáticas, en un afán de contestar a esta eterna pregunta.

Continuando con la pasarela de frases célebres entre los alumnos de prepa, está aquella que dice: "Sí, ya me veo usando álgebra para ir al súper". Eso puede ser verdad en la mayoría de los casos, pero si pides una factura y necesitas el IVA desglosado, tendrás que confiar ciegamente en las habilidades del empleado de la tienda, a menos que sepas cómo despejar la ecuación que te da el precio después del IVA (nota: el precio antes del IVA no es 85% del precio final sino (precio final)/1.15).

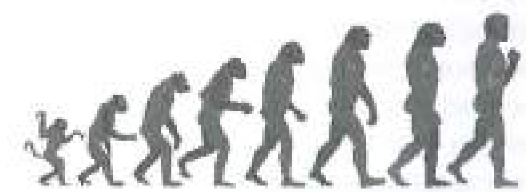


¿No vas a necesitar una factura nunca en tu vida? Aún así las matemáticas te pueden llegar a servir. Seguramente algún día querrás comprar un automóvil nuevo o una casa, y te enfrentarás con empleados bancarios o vendedores de autos que te hipnotizarán con promesas de cero intereses y pagos chiquitos para pagar poquito, pero en realidad ¿sabes cuánto estás pagando por el crédito? Comúnmente entre más benigno parezca un esquema de crédito es muy probable que la tasa de interés implícita sea más alta, para calcularla necesitas sólo álgebra de secundaria y un poco de paciencia. En estos casos como en muchos otros, el papel que juegan las matemáticas en la vida cotidiana es el de detectar mentiras y engaños.

Estando en el terreno de los engaños, la simple experiencia de leer el periódico o ver las noticias en la televisión es completamente diferente cuando se sabe un poco de matemáticas. Por ejemplo, uno de los temas que los periódicos tratan con gran frecuencia es el de la pérdida del poder adquisitivo de los salarios, sin embargo, es muy común que los reporteros hagan sus "estimaciones" sin explicar sus metodologías o la fuente de sus datos. Una vez más, sin conocimiento matemático, leer el periódico se reduce a un acto de fe.

Así, comprender las nociones básicas de álgebra y una pizca de matemáticas financieras nos da el poder de desenmascarar las mentiras, engaños y triquiñuelas de vendedores, periodistas y (aún peor) políticos. Pero vayamos más allá de las situaciones cotidianas que todos hemos de enfrentar y adentrémonos al terreno del ejercicio profesional. Hasta hace algunos años, la aplicación de las matemáticas avanzadas al ejercicio profesional era un terreno restringido de manera casi exclusiva a las ciencias físicas y a las ingenierías. Sin embargo este panorama está cambiando de una forma radical y cada día son más las disciplinas que están aplicando métodos que van de la administración cuantitativa a la psicología matemática, pasando por aplicaciones a la biología, la medicina o la planeación urbana.

Tradicionalmente los alumnos de las preparatorias a quienes les interesaba la ciencia pero no las matemáticas solían estudiar biología, con la firme esperanza de no volver a ver una fórmula en sus vidas. Desgraciadamente para ellos, esto se aleja cada vez más de la realidad, ya que a medida que avanza la biología ésta depende cada vez más de las herramientas matemáticas para producir modelos de la realidad. Quizá el ejemplo más famoso de esto es el de la genética. Aquí los métodos de la teoría de probabilidad se utilizan con fines tan exóticos como encontrar la distancia evolutiva entre dos especies. Esto es, nos permite saber cuántas generaciones atrás debemos remontarnos para encontrar un ancestro común a dos especies. Esto se hace comparando el código genético de las dos especies y modelando el ritmo con que cambia este código mediante la evolución. Así, podemos estimar qué tan "lejos" se encuentran evolutivamente una de la otra.



La evolución misma es sujeta a ser analizada desde un punto de vista matemático. La teoría de juegos nos ofrece herramientas para explicar partes de la evolución que pueden parecernos casi absurdas. Tomemos como ejemplo lo grave del croar de los sapos. En los cursos básicos de biología nos enseñan que aquellas especies que sobreviven son las más aptas. Pero podemos preguntarnos: ¿En qué le ayuda a un sapo croar de manera más grave? Lo más probable es que lleguemos a la conclusión de que no le sirve de nada en la vida diaria. Sin embargo, los sonidos graves se asocian a lo largo de la historia evolutiva con sapos grandes. Así un sapo que croara de manera grave tiene mayor probabilidad de reproducirse que una con un croar agudo.

Así, con el paso de las generaciones, los sapos adquieren un croar cada vez más grave ya que de no hacerlo sus genes no se perpetuarán al no lograr reproducirse. Un caso muy similar es el de los pavo reales, cuyo plumaje no sirve a ningún propósito más que el de brindarle al macho de la especie una ventaja en las señales que manda a las hembras con las que podría reproducirse. Estos dos ejemplos los hemos logrado describir con palabras; sin embargo, traducirlos al lenguaje matemático nos permite no sólo escribirlos de una manera más elegante sino que al resolver el problema, estamos de hecho resolviendo todos los problemas que se puedan escribir de la misma forma. Es decir, si resolvemos el problema de los sapos y encontramos que el croar seguirá haciéndose más grave mientras las leyes de la física lo permitan es muy probable que la solución al problema de los pavo reales sea muy similar. Además, el utilizar un modelo matemático nos permite complicar las cosas más allá de lo que podríamos hacer utilizando sólo palabras. Podemos comenzar a modelar varios atributos en una especie y el papel que juegan en conjunto en el éxito para reproducirse de un individuo y así encontrar que características que prevalecerán en el futuro evolutivo de esa especie.

La teoría de juegos es una herramienta de las matemáticas aplicadas que no sólo se aplica a la biología, sino que se ha enriquecido de ella. Al tomar algunas de las ideas de la evolución ha logrado avances importantes en aplicaciones en la ciencia política y la economía. Una aplicación directa (y sumamente simplificada) del ejemplo de los sapos se puede hacer a los partidos políticos de la siguiente forma: si suponemos que un partido prometió únicamente lo que es estrictamente posible cumplir, otro partido puede beneficiarse en número de votos prometiendo un poco más, lo que provocará que el primero prometa aún más y así sucesivamente… hasta que las promesas de campaña sean como el plumaje de los pavo reales.

Si bien hoy en día a casi nadie le

sorprende la aplicación de las matemáticas a las ciencias económicas, lo que sí es sorprendente es la sofisticación de las matemáticas utilizadas. Cuando se leen las convocatorias para hacer estudios de posgrado en economía, tanto en Inglaterra como en Estados Unidos, las universidades parecen más preocupadas porque los aspirantes manejen el álgebra lineal y el cálculo de varias variables que los principios de la economía. Algunas incluso sugieren que es útil que los aspirantes sepan un poco de análisis. Esto no ha de sorprendernos después de hojear una revista especializada prácticamente en cualquier área de la economía. La intensidad del uso de modelos matemáticos en estas disciplinas es comparable sólo con el de las ciencias físicas. Este paralelo entre las ciencias económicas y las ciencias físicas va más allá de la profundidad o complejidad de las herramientas utilizadas, en muchas ocasiones las herramientas son las mismas. Por ejemplo, la macroeconomía ha tomado prestada de la ingeniería la teoría de control óptimo como una de las herramientas más ampliamente utilizadas y las finanzas han tomado la teoría del movimiento Browniano como una de sus piedras angulares. Así cada vez más el perfil de los economistas se aleja más de aquel individuo que leía tomo tras tomo de las teorías de Ricardo, Smith, Marx y Mill, y se acerca más al del estudiante de ingeniería que deambula por las universidades con un grueso tomo en cuyo lomo se aprecia la palabra "Cálculo".

Hasta ahora hemos considerado aplicaciones en disciplinas que podríamos considerar como puramente académicas, sin embargo la historia difícilmente acaba ahí. Uno de los conceptos que más se utilizan en la administración moderna es el manejo de inventarios "just in time". Este esquema sería absolutamente impensable sin la ayuda de la investigación de operaciones. Esta disciplina nos permite diseñar desde la distribución de los productos en las bodegas, hasta las rutas que han de seguir los camiones repartidores para optimizar los recursos disponibles. Utilizando información sobre la cantidad que se vende de un cierto producto cada día, podemos mantener inventarios mínimos y así disminuir drásticamente los costos de almacenamiento. Es gracias a estas herramientas que las existencias de muchos supermercados consisten de sólo aquello que está en exhibición, lo que evita que inviertan en grandes áreas de almacenamiento en sus sucursales. Más allá de la maximización de ganancias, existen industrias completas que dependen de la investigación de operaciones para sobrevivir. El caso arquetípico de esto lo constituyen las aerolíneas. El margen de utilidad bajo el que operan estas empresas

es muy estrecho y además están sujetas a algunas regulaciones sumamente estrictas, tanto en los estándares de sus equipos, como en la cantidad de horas que puede estar en el aire cualquier miembro de las tripulaciones. Así, se enfrentan con problemas complejísimos de asignar las tripulaciones de tal forma que no se violen las reglas internacionales, pero al mismo tiempo no darle a su personal mucho más tiempo en tierra del estrictamente necesario, ya que esto significa un costo significativo para las empresas. A tal grado es importante la optimización de recursos en las aerolíneas que inclusive la cantidad de sobreventa de boletos se optimiza.

Hemos, hasta ahora, considerado aplicaciones de las matemáticas "hacia afuera", esto es, aplicaciones a otras ramas del conocimiento. Sin embargo, vale la pena considerar que otro lugar inesperado de aplicación de las matemáticas son las matemáticas mismas. Esto, que de inicio puede parecer redundante no lo es. En el desarrollo de conocimiento nuevo dentro de las matemáticas (puras o aplicadas) con frecuencia se encuentra apoyo en otras ramas de la disciplina que uno nunca esperaría. Por ello, la especialización necia que sólo se concentra en un área muy específica y se olvida del resto de los conocimientos matemáticos representa un riesgo. Frecuentemente en áreas distantes se encuentra la respuesta que se busca, de la misma forma que las demás disciplinas encuentran en las matemáticas (un área que creen muy distante) las respuestas que ellas buscan.

En nuestro recorrido por las aplicaciones de las matemáticas hemos pasado del supermercado a la agencia de coches, al laboratorio de biotecnología, por las promesas de campaña y por la sobrevivencia de las aerolíneas. Esta breve semblanza no pretende de manera alguna ser una exposición exhaustiva de las aplicaciones de las matemáticas, sino solamente una exposición inicial que permita al lector advertir la multiplicidad de lugares donde, de manera inesperada, las matemáticas pueden surgir como herramientas útiles (y hasta necesarias). Es nuestra esperanza que el lector adverso a las matemáticas se interese en ellas por el simple hecho de que le serán útiles en la vida y que el lector que es ya un amante de las matemáticas, sienta la curiosidad por explorar aplicaciones poco conocidas o poco convencionales de esta maravillosa ciencia.

Mentiras verdaderas

Jesús Puente Arrubarrena
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM
jparrubarrena@hotmail.com

Ganador del segundo lugar en el I Concurso de Ensayo de Matemáticas Aplicadas

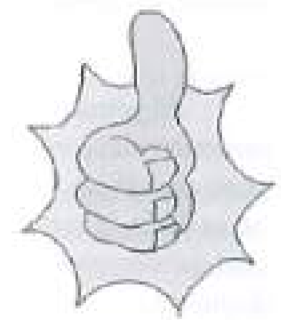
Todos mis hermanos mayores viven en Europa, trabajan en un país llamado Australia, radican en El Cabo. Todos ellos estudiaron matemáticas y todos los que no nacieron en México se especializaron en pediatría. Los que nacieron en Líbano ya se han casado y los demás vendrán próximamente a vivir a México.

Podría parecer que miento, pero todo lo que el párrafo anterior dice es verdad, y no es porque yo sea un ignorante, tenga una familia numerosa y extravagante, o esté loco, sino porque soy primogénito.

Para probar proposiciones matemáticas es necesario demostrar que cada caso que cumple las hipótesis, necesariamente cumple la conclusión. Por ejemplo, si quiero demostrar que

Todos los números pares entre el 10 y el 20 son divisibles por 2.

basta con escribir



10=2*5
12=2*6
14=2*7
16=2*8
18=2*9
20=2*10

Si queremos demostrar que una proposición es falsa, es suficiente dar un contraejemplo, esto es, un caso en el que se cumplen las hipótesis, pero no la conclusión. Me viene a la mente la proposición.

Todos los abogados detestan las matemáticas.

Esta proposición es falsa pues Pierre de Fermat era abogado y disfrutaba de las matemáticas en sus ratos libres, de hecho sus contribuciones han sido muy importantes para la teoría de números.

Pierre de Fermat

El primer párrafo de este ensayo pertenece a un conjunto trivial: cuando no existe caso alguno que satisfaga las hipótesis, es decir, la naturaleza de las hipótesis es tal que siempre son falsas. Entonces suele decirse de la demostración que es por vacuidad, y lo que puede parecer extraño es que estas proposiciones no son falsas ni indeterminadas (una proposición tiene que ser por definición falsa o verdadera), sino verdaderas. Es sencillo enunciar la razón, pero cuesta un poco de trabajo aceptarla: si no hay ningún caso que cumpla las hipótesis, entonces puede trivialmente decirse que todos los casos que cumplen las hipótesis necesariamente satisfacen la conclusión, pues simple y sencillamente no hay ninguno de éstos. Otro modo de verlo es que no se puede comprobar que sea falso pues para dar un contraejemplo necesitamos por fuerza que haya un caso que cumpla las hipótesis y no satisfaga la conclusión, pero como éste no existe, entonces no hay de dónde echar mano para probar la falsedad de la proposición. No es que seamos legalistas en el aspecto de que todas las proposiciones son verdaderas hasta que no se demuestre lo contrario, sino que simplemente no existe caso alguno en el que las hipótesis se satisfagan.

Entonces, regresando al párrafo inicial:

Todos mis hermanos mayores viven en Europa

Debe interpretarse como: Todas las personas que pertenecen al conjunto de mis hermanos mayores pertenecen al conjunto de la gente que vive en Europa. La proposición es verdadera dado que yo no tengo hermanos mayores.

Del mismo modo podemos decir que es cierto que:

Todos mis hermanos mayores trabajan en Australia

y que

Todos mis hermanos mayores radican en El Cabo.

El resto de las proposiciones se demuestran igualmente por vacuidad.

De este modo podemos ver que el párrafo introductorio, aunque parezca una gran falacia (pues ni Australia ni El Cabo están en Europa además de que El Cabo no está en Australia), no lo es.

Asimismo podemos decir que las siguientes dos proposiciones:

Todos los perros que tienen seis patas son negros
Todos los perros que tienen seis patas son blancos

Son verdaderas aunque parezcan recíprocamente excluyentes, pues no hay perros con 6 patas, nótese que si existiera tal mutante, entonces la verdad de una proposición de las anteriores implicaría la falsedad de la otra y no podrían ser ambas verdaderas -habría únicamente perros de 6 patas blancos y no negros, haciendo la segunda proposición falsa; habría solamente negros y no blancos, siendo falsa la primera; o bien habría tanto perros de seis patas negros como blancos, haciendo a ambas proposiciones falsas -pero como no es el caso (o, por lo menos, el incauto autor no está al tanto), entonces ambas proposiciones son verdaderas.

Si observamos con cuidado las propiedades del ejemplo anterior, tomándolo desde otro enfoque, encontramos que si de alguna forma yo llego a probar que dos proposiciones de la forma:

Si ciertos elementos cumplen la propiedad A, entonces cumplen la B.
Si ciertos elementos cumplen la propiedad A, entonces no cumplen la B.

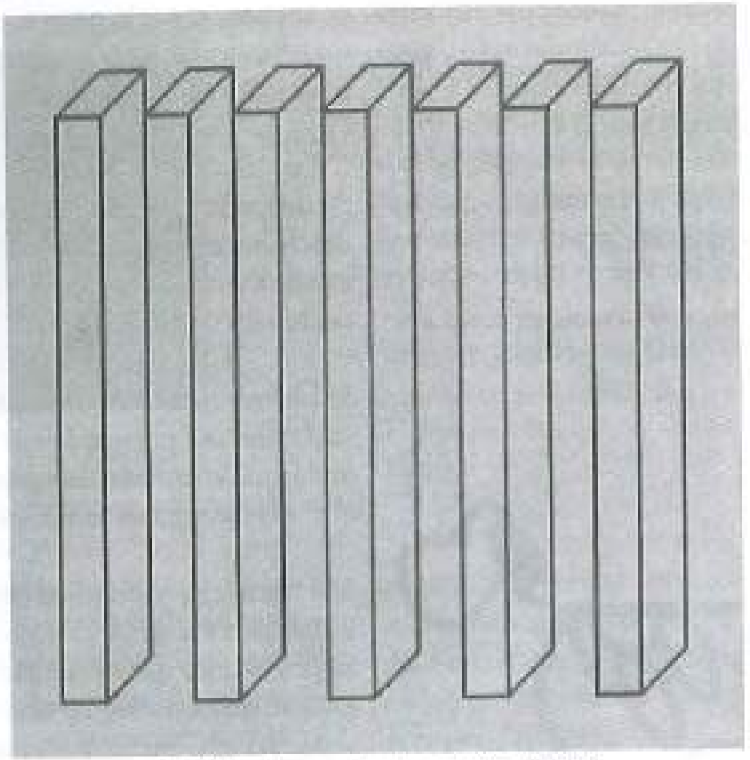
Son verdaderas simultáneamente, entonces lo que he conseguido es demostrar que no hay elementos que satisfagan A. Quisiera aclarar que esto no es una prueba por vacuidad, sino por contradicción porque en vez de probar las últimas dos proposiciones, las estamos tomando por verdaderas y concluyendo que la única posibilidad de que esto se de es que no haya elementos que cumplen A.

Para finalizar presento las siguientes dos proposiciones:

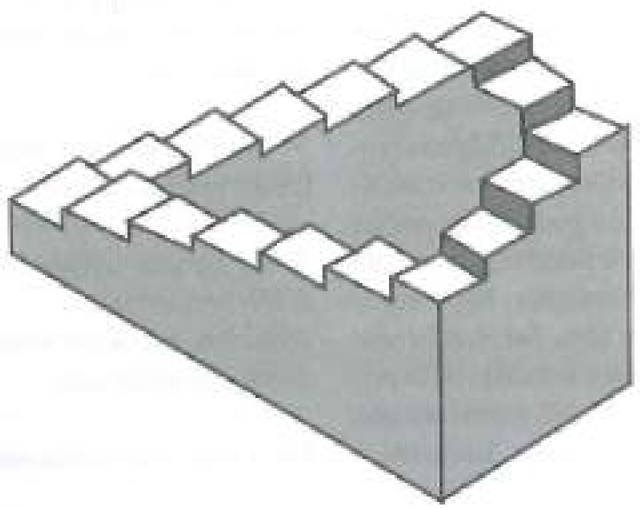
Todos los que leyeron este ensayo quedaron impresionados
Todos los que leyeron este ensayo quedaron decepcionados

Esperando que no sean ambas verdaderas.

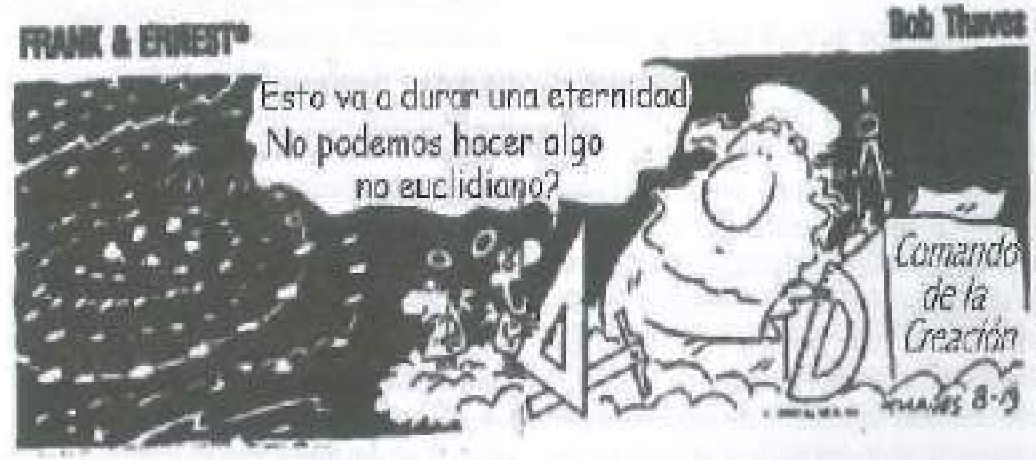
Figuras Imposibles



¿Cuántas barras hay en este dibujo?



El Rincón del Humor



Los matemáticos del Café Escocés

Dr. Ramón Espinosa Armenta
Departamento de Matemáticas, ITAM
ramon@itam.mx

Entre la primera y la segunda guerra mundial, la ciudad de Lvov era un importante centro cultural y científico en Polonia. Lvov era una ciudad especialmente bella, con sinuosas y pintorescas calles, una espectacular vista al Gran Castillo situado en las colinas, edificios antiguos y hermosas iglesias. Los habitantes de Lvov, a diferencia de los ciudadanos de otras ciudades de Europa, eran gente amable y alegre, orgullosos de su ciudad. La vida social florecía en numerosos Cafés donde se reunían artistas y científicos.

Algunos de esos Cafés se encontraban cerca del Politécnico de Lvov, el cual contaba con una de las escuelas de matemáticas más importantes de Europa, encabezada por Stefan Banach, pionero del análisis funcional y considerado uno de los matemáticos más importantes del siglo XX. Los matemáticos del Politécnico de Lvov comenzaron a reunirse en el Café Roma los sábados en la noche, después de su seminario semanal de matemáticas; sin embargo Banach, molesto porqué el Café no le quería dar crédito, decidió trasladar las tertulias al Café Escocés, situado en la acera de enfrente.

Las reuniones de matemáticos en el Café Escocés fueron inicialmente irregulares pero Banach se dio cuenta de que prefería el ambiente del Café para trabajar que el de su propia oficina, así que comenzó a acudir más frecuentemente, para finalmente trabajar, charlar y tomar café ahí todos los días. Además de Banach, otros asiduos asistentes al Café Escocés eran Hugo Steinhaus, quien años atrás había "descubierto" a Banach cuando éste era un pasante de ingeniería que daba clases particulares de matemáticas para sobrevivir, y Stanislaw Mazur, el colega más cercano a Banach. Posteriormente, el círculo se expandió para incluir a Kaczmarz, Auerbach, Schauder, Kuratowski y Nikodym, entre otros. Usualmente, los estudiantes no participaban en las reuniones del Café escocés y solo dos amigos, Stanislaw Ulam y Josef Schreier, fueron admitidos desde sus años de estudiantes.

Generalmente, el grupo llegaba al Café entre las 5 y las 7 p.m. -siempre ocupando las mismas mesas- y se pasaban varias horas planteando y resolviendo problemas matemáticos y anotando las soluciones sobre las mesas, lo cual no era del agrado del dueño del local. Cuando alguien planteaba un problema, los miembros del grupo se quedaban en silencio, absortos en sus pensamientos, mientras bebían tazas y tazas de café. Al resto de los comensales debió parecerles curioso aquel extraño grupo. Una de esas reuniones duró 17 horas, dando por resultado la demostración de un importante teorema de análisis funcional; sin embargo al otro día, cuando ninguno de los participantes se hallaba en condiciones de reconstruir la demostración, se encontraron con que la mesa donde ésta fue apuntada había sido escrupulosamente limpiada.

Café Escocés

Para evitar más problemas con el dueño y para evitar que el trabajo de los matemáticos se perdiera la esposa de Banach, Lucja, compró una gruesa libreta de pasta dura, la cual encargó al dueño del local para que su marido y sus colegas apuntaran sus problemas. La idea fue del agrado del dueño, quien comenzó a tomar cariño por sus clientes, después de todo no eran adolescentes problemáticos sino distinguidos profesores del Politécnico de Lvov. El Libro Escocés, como comenzó a llamarse a la libreta, estaba al alcance de todo matemático que acudía al Café. En ella se apuntaban problemas abiertos al inicio de cada página impar, dejando el resto de la página y el reverso de ésta en blanco para que después alguien proporcionara la solución. El primer problema en el Libro Escocés fue anotado por Banach el 17 de julio de 1935.

No siempre las discusiones del grupo de matemáticos del Café Escocés giraban en torno a las matemáticas, algunas veces se hablaba de ciencia en general, especialmente física y astronomía. También se discutían las noticias concernientes a Polonia y al resto de Europa. Algunos como

Stefan Banach, 1892-1945

Stozek y Auerbach jugaban ajedrez. El sentido del humor era una de las características más importantes del grupo, con frecuencia se reían a carcajadas de algún chiste o de alguna anécdota graciosa.

En ocasiones acudían a Lvov matemáticos de otras partes de Europa, los cuales eran invitados a las tertulias en el Café Escocés. Uno de esos invitados fue el francés Henry Lebesgue, quien llegó a cenar junto con quince miembros de la comunidad matemática de Lvov. El mesero dio a cada uno de ellos el menú y, no percatándose que Lebesgue no era polaco, le dio uno también. Lebesgue miró con atención el menú y cuando el mesero se volvió acercar, se lo regresó diciendo: *"Merci, je ne mange que des choses bien définies"* (Gracias, yo solo como cosas que estén bien definidas).

Con frecuencia la persona que apuntaba un problema en el Libro Escocés ofrecía un premio por su solución, el cual podía ser un café, una cerveza, una cena, una botella de vino o de cognac o un ganso vivo. Los visitantes extranjeros ofrecían pintorescos premios, pero difíciles de reclamar: el matemático húngaro von Neumann ofreció "una botella de whisky de medida > 0", el inglés Ward una comida en Cambridge, y el suizo Wavre un fondue en Ginebra, pero en ningún caso era claro que el premio incluyera los gastos de viaje.

En 1939 la sombra de la guerra se cernía sobre Europa. Los matemáticos de Lvov acordaron que, en caso de que la ciudad fuera bombardeada, Mazur guardaría el Libro Escocés en una caja de ajedrez y lo enterraría junto a una de las porterías de la cancha de fútbol de la ciudad, de modo que, si alguno de los miembros del grupo sobrevivía a la guerra, podría recuperar el libro para la posteridad.

Poco antes de la guerra Stefan Banach recibió varios honores. En abril de 1939 fue electo Presidente de la Academia Matemática polaca, sociedad que había ayudado a fundar veinte años antes. El 9 de junio de ese año la academia polaca de ciencias otorgó a Banach el Gran Premio, dicho galardón consistía en una considerable cantidad monetaria, de la cual Banach nunca pudo disfrutar pues la ceremonia oficial tendría lugar en octubre mas nunca se realizó, pues la Segunda Guerra Mundial inició el 1° de septiembre y unos días después las tropas soviéticas ocuparon Lvov, congelando todas las cuentas bancarias.

Entre 1939 y 1941, durante la ocupación soviética, en el Libro Escocés aparecen anotaciones de distinguidos matemáticos soviéticos como Aleksandrov, Sobolev y Lusternik, lo que indica el interés de los invasores por los trabajos de la escuela de Lvov. Después del inicio de hostilidades entre los alemanes y los soviéticos y la ocupación de la ciudad por las tropas nazis en el verano de 1941 no hubo más anotaciones en el Libro.

La invasión alemana destruyó el ambiente matemático en Lvov, los nazis mataron a Schauder, Auerbach y Kaczmarz. Ulam se fue a los Estados Unidos y se quedó allá (donde resolvió el problema de cómo iniciar la fusión en la bomba de hidrógeno). Banach sobrevivió a la ocupación alemana, pero viviendo en condiciones precarias. El 27 de julio de 1944 las tropas soviéticas retomaron Lvov. Stefan Banach murió de cáncer once meses después, tenía 53 años de edad.

El Libro Escocés sobrevivió a la guerra en buen estado. Después de la guerra, Steinhaus envió a Ulam una copia. En 1957 Ulam tradujo el Libro al inglés y distribuyó algunas copias entre amigos; un año después, en el Congreso Internacional de Matemáticas que se celebraba en Edimburgo, Ulam distribuyó fotocopias del Libro Escocés entre

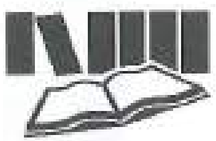
Caricatura de Emma Fabiola Navarro Montaño
ef_n@yahoo.com.mx

los participantes. Debido al nombre, el Libro creó una gran sensación entre los anfitriones, pero se desilusionaron cuando se dieron cuenta que la relación era sólo nominal.

El último problema del Libro Escocés fue anotado por Steinhaus el 31 de mayo de 1941. En total fueron 193 los problemas registrados. Banach anotó 14 problemas él solo y otros 11 en colaboración con Mazur y Ulam. Mazur anotó 24 (19 en colaboración), Ulam 40 (15 en colaboración), Steinhaus 10 y el resto fueron anotados por asistentes regulares como Auerbach o Schreier, o por visitantes distinguidos como Frechet, von Neumann y Sobolev.

Muchos problemas del libro jugaron un papel importante en el desarrollo del análisis funcional y otras ramas de las matemáticas. El problema 153, anotado por Mazur el 6 de noviembre de 1936, acerca de la existencia de bases de Schauder en espacios de Banach separables, permaneció como uno de los principales problemas abiertos del análisis funcional hasta que el matemático sueco Per Enflo encontró un contraejemplo en 1972. El premio -un ganso vivo- le fue entregado al año siguiente en Varsovia. Durante la década de los noventas el matemático inglés William T. Gowers resolvió algunos de los problemas del Libro Escocés utilizando técnicas de análisis combinatorio. Por éstas y otras contribuciones al análisis funcional Gowers fue galardonado en 1998 con la medalla Fields (el premio más importante en Matemáticas).

El Libro Escocés, una de las reliquias más veneradas del mundo de las matemáticas, estuvo en posesión de Lucja, la esposa de Banach, quien lo llevó a Wroclaw. Después de su muerte en 1954 el Libro Escocés pasó a manos del hijo de Banach, Stefan, un neurocirujano quien lo tiene actualmente.

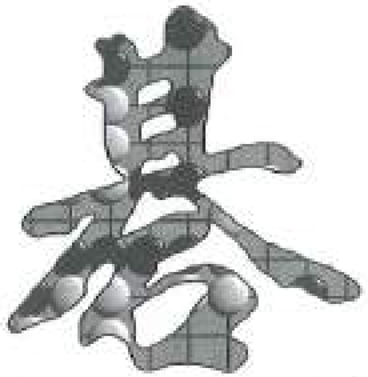


Bibliografía

1. Szlenk, W., "Stefan Banach y su escuela", *Miscelánea Matemática*, Número 8, 1989, 78-85.
2. Kaluza, R., *The Life of Stefan Banach*, Birkäuser, 1996.
3. Lindenstrauss, J., "The work of William T. Gowers", *Notices*, AMS, **46**, No. 1, 1999, 18.
4. Mac Tutor History of Mathematics, www-gap.dcs.st-ans.ac.uk/~history/index.html.
   (En esta página se pueden encontrar breves biografías de Banach, Steinhaus, Mazur y Ulam).

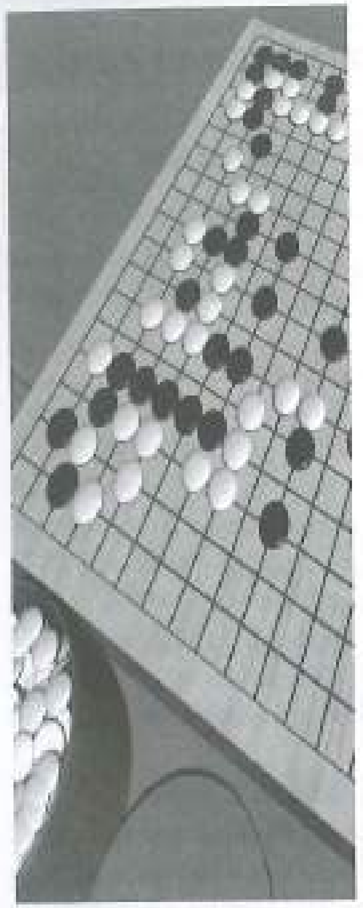
El Go: juego de príncipes orientales con el cual Akaboshi aprendió, a un costo muy alto, que hay cosas a las que uno no puede oponerse

Carlos Vladimiro González Zelaya.
Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.
mail@yahoo.com
Discípulo de José Chacón 4-dan



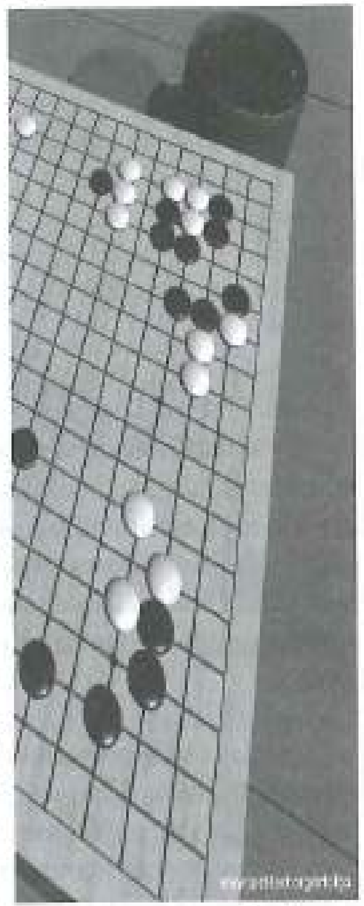
Es una tarde de verano de 1835 en un antiguo palacio del Japón feudal. Observamos a un par de guerreros frente a frente, meditando antes de empezar su combate. Son el viejo Meijin, Honinbo Jowa y Akaboshi Intetsu 7-dan, la joven promesa de la casa Inoue capaz de recuperar el prestigio de su maestro Gennan Inseki 8-dan y darle a éste la oportunidad de reclamar para sí el título de Meijin que Jowa se ha negado por años a abandonar. Ellos no lo saben pero protagonizarán una batalla destinada a convertirse en leyenda.

Hay únicamente dos o tres espectadores. Estos son también seres privilegiados, capaces, al igual que los adversarios, de ver o al menos sentir el filo de las invisibles armas que estos blanden furiosamente a la espera de que el rival cometa el mínimo titubeo. A las pocas horas de enfrentamiento, Jowa comete el primer y tal vez único error que se verá durante toda la batalla recibiendo una profunda herida, tal vez de muerte. Tras varias horas de feroz enfrentamiento, el joven guerrero se sabe capaz de acabar con su oponente y, desplegando al máximo todas sus aptitudes, se encamina hacia una fácil victoria.



Esta batalla, sin embargo, no se está librando en el mundo de los humanos, sino en un mundo que pocos llegan a observar mas que tangencialmente y cuya representación en este mundo se plasma sobre una tabla marcada con una cuadrícula de diecinueve por diecinueve líneas, cuyas trescientas sesenta y un intersecciones sirven como mapa de este mundo alterno.

Se determina un receso de un par de días, en el cual los rivales se prepararán para continuar la batalla. El joven Akaboshi se retirará a meditar en un pequeño bote en medio de un lago durante esos dos días, mientras que Jowa se dedicará, con nulos resultados, a encontrar una debilidad en el juego planteado por Akaboshi. Totalmente agotado y a punto de darse por vencido, frente a un Jowa delirante aparecerán tres fantasmas, los cuales le revelarán tres preciosas jugadas, tal vez las únicas capaces de cambiar el resultado de este enfrentamiento.



Al reanudarse el juego, Akaboshi, a pesar de todos sus esfuerzos, ve la victoria escapársele de las manos. Sin embargo, alcanza a ver a lo lejos una pequeñísima oportunidad de volver al juego. Pasan los días y la batalla continúa. El último día de juego Akaboshi hace un último y desesperado ataque, el cual Jowa logra librar, no sin cierta dificultad. Una vez que es imposible cambiar el resultado Akaboshi se da por vencido. Tras los obligados agradecimientos mutuos que la formalidad impone y mientras ambos jugadores recogen las piedras del campo de batalla, Akaboshi comienza a vomitar sangre sobre el tablero y cae tendido a su lado. Dos meses

después, los mismos fantasmas que injustamente ayudaron a Jowa vendrán además a arrebatarle lo poco de vida que no dejó sobre el tablero a Akaboshi Intetsu, de escasos veinticinco años, poniendo fin así a esta triste historia.

Este juego, capaz de provocar tales pasiones y uno de los más antiguos de la humanidad, con orígenes en China hace más de cuarenta siglos, ha perdido actualmente parte del dramatismo característico de los juegos que se daban en el antiguo Japón, pero ha ganado en la cantidad de jugadores que se pueden encontrar en el Oriente habiendo millones de ellos principalmente en Japón, Corea y China, algunos con la habilidad suficiente como para haber rivalizado con el propio Jowa. Curiosamente, este juego es muy poco conocido en el mundo occidental.

Me refiero al Go, también conocido como I-go, Baduk o Weiqi, considerado en la antigua China como una de las cuatro disciplinas que todo hombre educado debía dominar, siendo las otras tres la Pintura, la Poesía y la Música. Quizás el motivo por el que este juego puede llegar a ser tan apasionante es que puede ser visto como una versión ultra-simplificada del universo, donde uno puede reflejar sus miedos y sus deleites y, si se tiene ya un gran dominio del juego, interpretar las jugadas del rival del mismo modo, siendo un jugador fuerte capaz de juzgar si su oponente se encuentra feliz, tenso, bajo presión o temeroso.

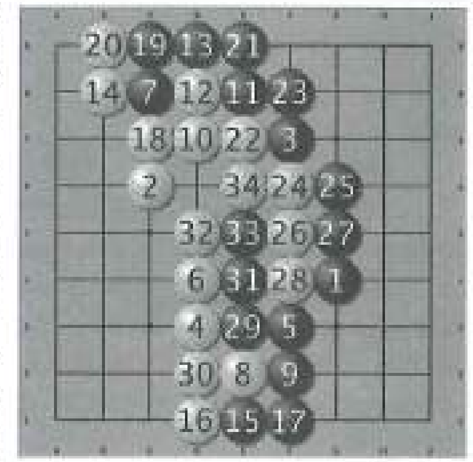


Diagrama 1

Es un juego de reglas muy sencillas, quizás con las reglas más sencillas que tenga cualquier juego de estrategia más complicado que el Gato. Los dos jugadores colocan alternadamente piedras negras y blancas sobre las intersecciones de la cuadrícula y dichas piedras no se moverán a lo largo del juego a menos que sean "capturadas" por el rival. El jugador que domine mas intersecciones vacías (territorio) al finalizar la partida será el ganador. El Diagrama 1 muestra un ejemplo de partida en un tablero más pequeño que el usual, con solo nueve por nueve líneas, tamaño que es recomendable para cuando se empieza a jugar. Para reproducir el juego basta con colocar las piedras en el orden que indican los números.

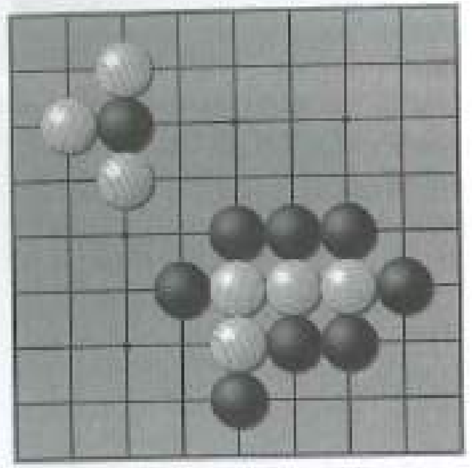


Diagrama 2

Un grupo de piedras se puede capturar del siguiente modo: una piedra o un grupo de piedras tiene cierto número de intersecciones vacías a su alrededor a las que llamaremos libertades. Cuando todas estas libertades han sido tapadas por el enemigo, las piedras son retiradas del tablero. Por su parte, el jugador cuyo grupo está siendo cazado tratará de evitar su captura añadiendo piedras al grupo con el fin de proporcionarle a este más libertades. A modo de advertencia, cuando a un grupo de piedras le queda una sola libertad, es cortés anunciarlo al rival mediante la expresión japonesa: "Atari". En el Diagrama 2 podemos observar ejemplos tanto de una piedra negra como de un grupo de piedras blancas en Atari.

Con estas pocas reglas se obtiene un juego a primera vista muy sencillo pero que puede requerir muchos años para su dominio. Es tan difícil entenderlo que a la fecha no se ha logrado crear un programa de computadora capaz de ganarle a un jugador de nivel medio, ya no digamos a un profesional, lo que, comparativamente con el ajedrez en el que una computadora ya le ha ganado a Kasparov, nos da una idea de la complejidad del Go. Como un compañero mío decía, en el ajedrez se libra una batalla, pero en el Go se pelea una guerra.

En México, el Go no es muy conocido, aunque últimamente ha habido un moderado incremento en el número de jugadores mexicanos. Si tienes interés en conocer más del juego puedes acudir el segundo y cuarto domingo de cada mes a San Borja #938 de las 12:00 a las 18:00 horas aproximadamente, donde se reúnen varios jugadores fuertes, tanto mexicanos como japoneses. También es posible encontrar jugadores cualquier día de la semana en los jardines de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

En la red puedes encontrar bastante información en Sensei's Library: http://senseis.xmp.net/ y se pueden encontrar un par de obras interesantes de literatura sobre Go en los libros *The Master of Go* de Yasunari Kawabata y *First Kyu* del Dr. Sung-Hwa Hong, a quienes también inspiró la trágica historia de Akaboshi.

1a Ley del Progreso Científico

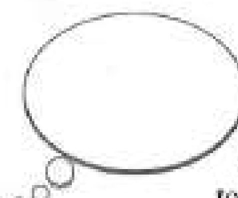
El avance de la ciencia se puede medir por la velocidad con que se acumulan las excepciones a las leyes anteriormente establecidas.
Corolarios:

1. Las excepciones son siempre más numerosas que las reglas
2. Siempre hay excepciones para las excepciones establecidas
3. Cuando se llegan a dominar las excepciones, nadie recuerda a qué regla corresponden

Adivina la hora

Se tienen dos relojes de arena. Uno dura 4 minutos y el otro 7. Se quieren medir 9 minutos. ¿Cómo se puede lograr?

María, Juan y José



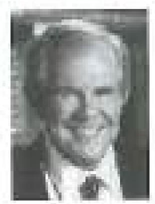
María tiene dos novios: Juan y José. Para visitar a Juan debe tomar el tren en dirección norte y para visitar a José debe tomar el tren en dirección sur. Ambos trenes pasan cada 10 minutos y como a María le gustan ambos por igual ni se fija si un tren va al norte o al sur y toma el primero que pase. Sin embargo, por algún motivo María termina visitando a Juan un 90% de las veces, y a José solo el 10% restante. ¿Por qué?

Un milenio después...

Francisco Hernández
Física, Facultad de Ciencias, UNAM
ferezisten@hotmail.com

«... Enséñanos de tal modo a contar nuestros días que entre la sabiduría en nuestro corazón.»
Salmos, Libro IV 90; 12.
Reina de, Casiodoro y Cipriano de Valera, *Santa Biblia.*

Pat Robertson [Marion Gordon Robertson] es uno de los más famosos tele-evangelistas de los EUA. Es dueño de CBN (Christian Broadcasting Network) y sin duda es el que mejor preparación académica recibió de todos los predicadores pentecosteses[1] de la televisión. A finales de la década de los ochentas compitió en las primarias por la candidatura del partido republicano para la presidencia en contra de Bush y Dole. Este hombre proviene de lo que se denomina el «cinturón de la biblia»; región del sur de los Estados Unidos en donde la versión protestante de dicho libro se lee (e interpreta) textualmente. Por ello no sorprende que también sea un milenarista, es decir, es uno más entre aquellos que esperaban que el fin de los tiempos llegase en el año 2000 o cerca de esta fecha.



Pat Robertson, como muchos otros milenaristas, elaboraron predicciones para la fecha del advenimiento del fin del mundo y, como todos los demás, se equivocó; él suponía, entre otras cosas, que la situación en medio oriente era un mensaje de alerta del fin del mundo

Es cierto que desde 1988 se empezó a escuchar con más frecuencia cada vez y conforme se acercaba el fin del milenio, que pronto se llegaría al final de los tiempos. De hecho, uno de los periodos más intensos de estos rumores ocurrió entre 1995 y 1997 (sobre todo en zonas bajo la influencia de algunas iglesias cristianas protestantes). Es importante notar que los siempre errados cálculos para dicho final en muchos casos no coincidían y que hubo una variación en el pronóstico de diez años aproximadamente. ¿A qué se debe este rango relativamente grande en los invariablemente fallidos pronósticos de los fundamentalistas?

[1] Pentecostés es la palabra griega que significa cincuenta y se refiere a los cincuenta días después de la Pascua, fecha en la cual el espíritu santo se apareció en los cielos en forma de lengua de fuego. Los pentecosteses son fundamentalistas que suponen que los dones del Pentecostés (Hechos, 2) tiene vigencia siempre.

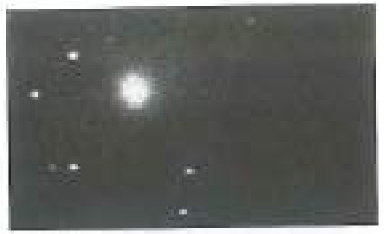
Resulta que la fecha del nacimiento de Jesús no se conoce con certeza, y se desconoce porque existen dos fuentes de error. Las fuentes de error no son independientes del todo y competen tanto a la historiografía como a la astronomía y a las matemáticas. Es importante aclarar que en este análisis se parte de una interpretación naturalista de los hechos que se narran en las diferentes fuentes y que en algunos casos constituyen esfuerzos intelectuales muy serios sobre el análisis de los datos. También se parte de un hecho incuestionable; Jesús -el hombre- sí existió.

El nacimiento de Jesús está perfectamente acotado por dos fechas y ninguna de ellas coincide con el año cero. Atenidos a historiadores como Suetonio, Flavio Josefo, Orígenes y haciendo uso de las narraciones que aparecen en las biblias (tanto en la versión protestante como la de la iglesia de Roma) se puede ubicar el nacimiento de dicho personaje entre los años 12 y 4 antes de nuestra era (a.n.e). La primera de las fechas es el intento de conciliar algún evento astronómico extraordinario con la narración de la estrella de Belén. La aparición del cometa Halley entre el 12 y 11 a.n.e (cálculo efectuado por el propio Halley) y la alineación de Marte, Júpiter y Saturno en el año 12 a.n.e, cada uno puede ser la explicación de la aparición de una nueva «estrella» en el cielo. Tómese en cuenta que el pueblo judío estaba constituido por tribus seminómadas.

Otra de las explicaciones naturalistas de la estrella de Belén es la que podríamos denominar «conjetura de Kepler» que, por cierto, ha prevalecido por mucho tiempo. En un folleto publicado por Kepler en 1606 propone que la aparición de dicha «estrella» es producto de una conjunción[2] Por lo explicado hasta aquí, si se desea contar los años de nuestra era con base en el nacimiento de Jesús, muy probablemente el año sea 2007 ó 2008 o, incluso -aunque menos probable- el 2015. Esta es también la razón por la en la constelación de Piscis de Júpiter y Saturno en el año 7 antes de nuestra era; sin embargo, meticulosos cálculos efectuados por el astrónomo Charles Pritchard (en 1846) muestran que en ninguna de las tres conjunciones que acontecieron ese año (29 de mayo, 1 de

[2] La conjunción de dos astros es el momento en que dichos cuerpos celestes se encuentran en la misma región zodiacal. Es pertinente indicar que las constelaciones que definen las doce franjas del cielo no son de mismo tamaño angular.

octubre y 5 de diciembre) los planetas pudieron estar lo suficientemente cerca como para confundirse con una sola estrella. Otra posible explicación a dicho evento fue propuesta por el astrónomo David H. Clark quien defiende el hecho de que en la primavera del año 5 a.n.e hubo una supernova en la constelación de Capricornio[3]. El astrónomo británico Kidger, con base en registros chinos, afirma que la estrella fue una nova que apareció en el cielo durante 66 días en el mismo año cinco.



Por otra parte, desde el punto de vista histórico, entre los años 6-7 a.n.e el emperador Cesar Augusto ordenó que se llevase al cabo un censo poblacional en todo el imperio. El censo fue llevado al cabo por Publio Sulpicio Quirinio y este hecho está registrado por Flavio Josefo, judío que luchó contra Roma en la guerra de Judea y que fue el cronista para el propio imperio en dicha región. Lucas –el evangelista- afirma que el nacimiento de Jesús «aconteció» durante el censo. Por otro lado, en el evangelio de Mateo (2,1) se dice que la familia de Jesús regresa a Galilea después de la muerte de Herodes (cuando ya había nacido Jesús),... no parece existir consistencia en las fechas bíblicas

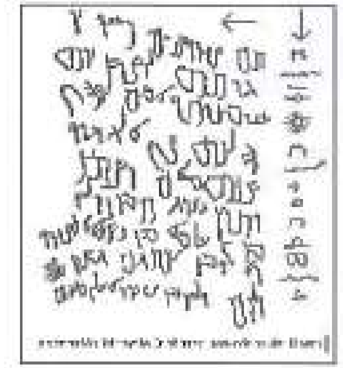
La matanza de los *santos inocentes* (que no ocurrió) que se refiere al culto del dios Mitra (el más popular en la época a la que nos referiremos) es el otro acontecimiento que acota la fecha del nacimiento de dicho personaje. Sin embargo, bajo el supuesto de que lo que se asevera en las narraciones evangélicas es cierto, Jesús pudo nacer, cuando más, en el año 4 a.n.e pues es el año de la muerte de Herodes el Grande. Es importante indicar que los judíos estaban bajo el dominio del imperio romano y que no se permitía la pena de muerte salvo por aprobación de Roma, si Herodes hubiese ordenado tal masacre o bien el hecho estaría registrado por algún historiador o se hubiese hecho acreedor de una pena muy severa.

Por lo explicado hasta aquí, si se desea contar los años de nuestra era con base en el nacimiento de Jesús, muy probablemente el año sea 2007 ó 2008 o, incluso -aunque menos probable- el 2015. Esta es también la razón por la cual los milenaristas suponían que el fin del mundo ocurriría entre 1996 y 1997.

[3] Véase *The Quarterly Journal of the Royas Astronomical Society* (diciembre de 1977).

Así mismo hay un hecho más que considerar y que antañe, ya no a la historiografía o la astronomía, sino a las matemáticas. En el siglo VI de nuestra era el monje *Doinysius Exiguus* a petición del papa Juan I, y con base en la fundación de Roma, lleva al cabo el primer cálculo acerca del nacimiento de Jesús. Sin embargo él comete un error y una irresponsabilidad; asignó equívocamente una fecha errónea a la muerte de Herodes el Grande y, por supuesto no puede considerar el cero pues «no existía» en su tiempo. Estas circunstancias han prevalecido hasta hoy.

¿Es verdad que el cero no existía en el siglo VI de nuestra era? La respuesta no es sencilla. Por un lado debe decirse que tres culturas desarrollaron de manera independiente la noción del cero y que dichas conceptualizaciones tienen sutiles e importantes diferencias. Lo que es cierto es que el monje Dionisio no conocía, y no podía conocer las concepciones maya e hindú del cero y, además, es poco factible que tuviese conocimiento del cero de los babilonios. Más aún, el cero de los babilonios no le hubiese servido para hacer sus cuentas.



El primer indicio de un sistema de numeración posicional que se conoce apareció en Babilonia en el año 2000 a.n.e. Un sistema no posicional es el romano; en el número romano III cada cifra tiene el mismo valor. En nuestro sistema de numeración, en el número 111 cada uno tiene diferentes valores; el uno de la derecha corresponde a una unidad, el uno de en medio tiene un valor de diez unidades o una decena y, el tercero tiene un valor cien unidades, es decir, el valor depende de la posición. En los sistemas de numeración posicionales, independientemente de la base, es indispensable indicar de alguna manera que no hay algunas asignaciones. Por ejemplo, si se tienen ciento dos borregos debe indicarse que existen dos unidades y una centena y ninguna decena. Los babilonios, cuyo sistema era semiposicional y de base 60, resolvieron el problema de dos formas; primero dejaron un espacio y después asignaron un símbolo para evitar confusiones. Este es un primer cero. Empero, este cero sólo se empleó como espacio y nunca se usó para resolver, por ejemplo, la operación « 7 – 7 «.

En el año 200 de nuestra era aparece el primer sistema posicional (de base 10) en China, sin embargo, no se sabe cómo se empleaba y si existía una utilidad extra para la cifra de no-asignación. Por otro lado, en el año 500 de nuestra era, la cultura Maya desarrolló el concepto de cero; el cero maya corresponde a un sistema posicional de base mixta. No se sabe con certeza si el cero fue empleado para la resolución de operaciones como la sustracción, se puede especular con base en los refinados cálculos empleados para el calendario (el error del calendario maya era de 5 minutos por año en comparación con el error de once minutos del calendario Juliano) e inferir que sí fue usado, empero, es una interpretación muy delicada. Los mayas usaron un sistema de base mixta y bajo la óptica occidental este hecho impidió desarrollar al máximo dicho sistema, empero, por otro lado, este sistema es el que justamente posibilitó un calendario muy preciso. El problema radica en el presupuesto de que los sistemas de numeración cumplen la misma función en todas las culturas (lo que no es necesariamente cierto), asimismo, debe tenerse presente que la evolución de sistemas de numeración no se rige por la lógica cartesiana y tampoco parte de una estructura axiomática; la evolución es la «solución» a problemas particulares... eventualmente, esta solución puede generalizarse.

En este sentido es interesante preguntarse por qué los griegos no desarrollaron un concepto de cero (considérese por ejemplo a individuos como Apolonio o Arquímedes). Una posible respuesta remite a otras áreas del conocimiento, es sólo una especulación y tiene que ver con la postura filosófica acerca de la «nada» de los pensadores griegos; dicho concepto chocaba con la estructura lógica de los griegos y conducía a paradojas... En contraste, en la India, que es la que hereda el cero a través de los árabes, el concepto de la «nada» formaba parte de la cotidianidad y la introducción del cero en su sistema de numeración no significó ninguna ruptura filosófica. Se conocen registros de un sistema posicional en la India desde es año 200 a.n.e y que,

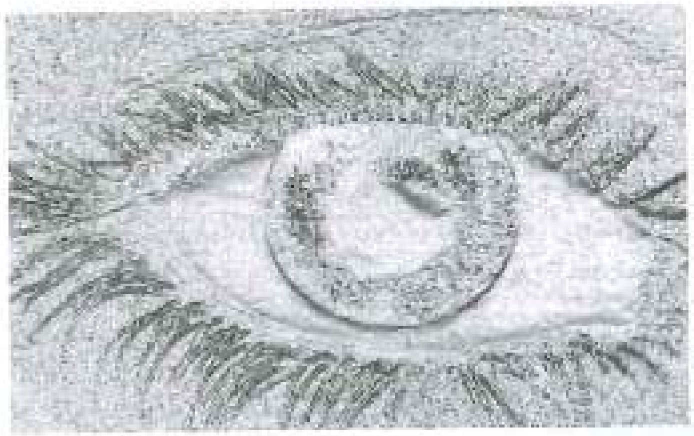
como en el caso de los mayas y los babilonios, la aparición de un sistema posicional condujo a la introducción del cero. Hay registros del siglo VI de nuestra en la India que presenta un sistema decimal posicional que será a la larga la base del sistema actual (con otros símbolos, salvo el cero) y que es la estructura conceptual de uso más generalizado que ha producido la humanidad.

El cero que hubiese resuelto el problema a Dionisio está muy cerca de la concepción de la cultura hindú; no era un cero con el que se cuenta (nadie cuenta: cero, uno, dos...); podría ser el cero de la recta numérica, es un cero que resulta de operaciones de sustracción y que en la India, en el siglo VI, sí se usaba para esos fines.

Finalmente debe decirse que la construcción del conocimiento tiene componentes culturales que es importante reconocer, que muchas veces dicha construcción es contingente y que está constituida por convenciones arbitrarias... no podemos perder esto de vista pues muchas veces las convenciones se vuelven fundamento, ¿acaso no hubo sectas milenaristas que decidieron suicidarse porque el año 2000 significaba el final?... ¿Y si hubieran sabido que no sabemos cuando aconteció el año 2000?

Un par de sensaciones

1a. Tengo la sensación de que me están observando. Me siento rodeada… A donde volteo veo a alguien, todos a la misma distancia. Algunos ven para otro lado y otros me miran fijamente, pero sé que todos me están vigilando, están esperando que haga algo o me están cuidando para que no lo haga, pero no sé qué es…

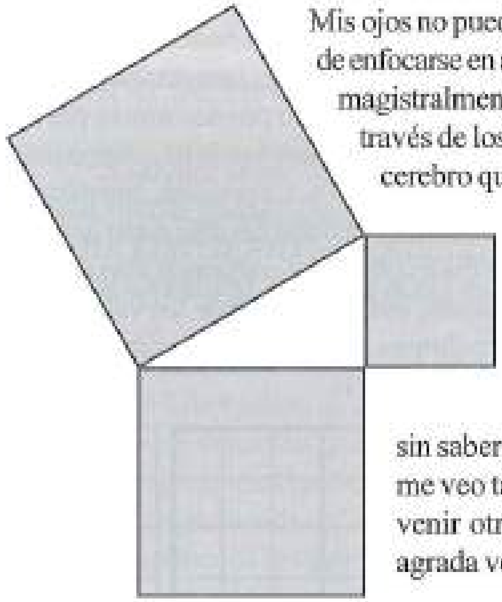


Estoy asustada, no soporto la presión. Necesito aire, necesito gritar (me asfixio en mis propios pensamientos). ¡Estoy desesperada! Necesito gritar. No lo resisto, estoy desesperada (un inmenso grito brota de mis labios y logra llenar toda la habitación)… abro los ojos. ¡Qué horror!

Continúan ahí, vigilando todavía. No se qué hacer, necesito calmarme, aire, respirar (tomo una bocanada de aire que entra hasta lo más profundo de mis pulmones, luego lo exhalo suavemente por la boca y así logro recuperar algo de la calma que había perdido). Miro a mi alrededor y me doy cuenta de la realidad, veo un sin fin de rostros familiares…, mi rostro, siempre fui yo. Nunca me vigilaron. Durante unos instantes olvidé dónde me encontraba. En realidad nadie me está vigilando, simplemente estoy mirando dentro de un calidoscopio; sólo por un instante me sentí horriblemente acorralada.

Orly Susana Goldfeder
Preparatoria Luis Vives
Visita a Universum

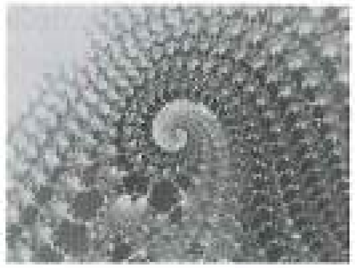
2a. Entras, llegas con una idea formada que generalmente es equivocada.



Mis ojos no pueden abarcar todo, pero tratan desesperadamente de enfocarse en algo: una demostración del teorema de Pitágoras magistralmente montada; un líquido azul que se transporta a través de los catetos, de la hipotenusa y parece recorrer mi cerebro que trata de explicarse cómo algo tan aburrido se puede volver tan bello, el líquido azul me recuerda al cielo claro, me hace sentir bien, pero puede recordar al amor por la forma en que corre.

Un caleidoscopio que multiplica tu imagen; sin saber si eso es bueno o malo me acerco, me reflejo y me veo tantas veces repetida que me mareo, habrá que venir otro día para analizar esto más a fondo, no me agrada ver tantas yo observándome.

Una torre inmensa de aros acomodados por tamaños te retan a que los acomodes de una forma específica pero es imposible que lo hagas en un día, tardarías meses. Las reproducciones en escala de la torre también están a tu alcance. ¿Trato de hacerlo? No hay razón para subestimarme. Muevo los aros y después de varios intentos logro hacerlo, tal vez esto pueda dejarme un mensaje en el inconsciente que más adelante me ayude en momentos críticos: «tal vez no al primer intento pero puedo hacer lo que me proponga».



Varios experimentos más que no logran atraparme como los tres anteriores, pero sin duda alguna el triángulo marítimo con textura de cielo, ese líquido azul que corre lentamente y que mis ojos no pueden parar de ver, en cierto modo me recuerda a un reloj de arena contándome el tiempo. Es una carrera contra el tiempo para ver cuánto puedo aguantar en mis cinco sentidos antes de perderme en el azul vacío y quedarme ahí. Tardo poco, en realidad muy poco y me quedo parada enfrente de la demostración sin hacer o decir nada.

Margarita Gutiérrez
Preparatoria Luis Vives
Visita a Universum

Si te crees muy bueno en dominó...

Sobre el tablero se colocaron algunas fichas elegidas entre las 28 de un juego de dominó normal, formando un camino cerrado y respetando la regla de contacto (dos fichas sólo pueden unirse por el mismo número). En el tablero vacío hay, como pistas, dos series de números. La primera, con números más finos, indica cuántas casillas están ocupadas en cada fila o columna. La segunda, con números más gruesos, indica la suma de los valores de cada fila o columna. El chiste es descubrir cómo están ubicadas las fichas.

					4	**10**
					3	**14**
					2	**9**
					3	**9**
					4	**6**
5	2	2	4	3		
29	**5**	**0**	**4**	**10**		

5	5	0	0		4	**10**
6			4	4	3	**14**
6				3	2	**9**
6			0	3	3	**9**
6	0	0	0		4	**6**
5	2	2	4	3		
29	**5**	**0**	**4**	**10**		

Ejemplo en un tablero reducido.

								4	**8**
								5	**14**
								3	**7**
								2	**3**
								2	**6**
								2	**6**
								7	**27**
								3	**5**
6	2	2	4	2	3	4	5		
3	**3**	**9**	**9**	**0**	**14**	**16**	**22**		

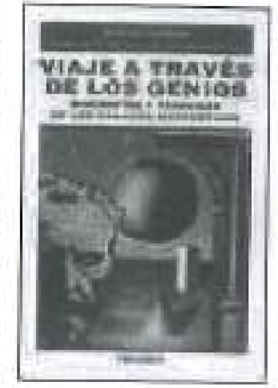
Ley de Nelson

«Robar ideas a una persona es plagio. Robárselas a muchas es investigación.»

¿Cuál es el producto de la siguient
(x-a)(x-b)(x-c).......(x-z)

El sendero del Paseo

¿Cómo se le ocurrió? ¿De dónde salió?



Si alguna vez te has hecho este tipo de preguntas, entonces este libro te puede interesar mucho. Se llama: ***VIAJE A TRAVES DE LOS GENIOS: BIOGRAFIAS Y TEOREMAS DE LOS GRANDES MATEMATICOS*** de WILLIAM DUNHAM.

Los grandes teoremas con sus respectivas demostraciones parecen haber salido de la nada, pero lo interesante es conocer un poco la situación que enfrentaba la persona para poder llegar a semejante conclusión. En este libro se dan referencias históricas asi como la vida del autor para poder entender mejor su trabajo, después nos lleva de la mano a desarrollar cada teorema.

Dicen que las matemáticas están relacionadas con todo lo que tenemos alrededor. Los grandes científicos como Galileo, Newton y Leibniz nos enseñaron que el mundo se podía representar por medio de las matemáticas. Alguna vez en el Círculo de Viena se pensó en la posibilidad de crear una nueva ciencia exacta regida por la lógica y las matemáticas; con esta ciencia, las personas podrían ser capaces de tomar decisiones siempre correctas.

El mundo como un juego matemático,

de John von Neumann un científico del siglo XX, es un libro en el que se describe cómo sería el mundo regido por una lógica universal: las matemáticas. ¿Será verdad que en un planeta en el que todos hablamos el mismo idioma los problemas se terminan?

Cursos impartidos por MIT

Massachusetts Institute of Technology ofrece cursos GRATIS por medio de Internet. Hay diferentes temas como álgebra lineal, teoría macroeconómica y optimización. Las clases son impartidas por video.

MIT pretende que un gran número de personas de habla hispana, que estén interesadas en aprender, lo puedan hacer completamente gratis. Lo único que tienen que hacer es entrar a http://mit.ocw.universia.net/ y encontrarán los materiales que tienen a disposición.

MIT OPENCOURSEWARE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Esto es un fomento para el libre acceso al conocimiento. ¡Hay que difundirlo!

XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemática Castellón, España, 17 al 26 de septiembre de 2004

Esta olimpiada está dirigida a delegaciones compuestas por dos profesores y cuatro alumnos de 22 países Iberoamericanos:

Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Costa Rica, Cuba, Chile, República Dominicana, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, Uruguay y Venezuela.

Los requisitos son no haber participado en dos Olimpiadas Iberoamericanas anteriores y tener menos de 18 años.

Para mayor información:
http://www.campus-oei.org/oim/xixoim.htm

... Y SI DE COMPUTADORAS SE TRATA...

Si estás buscando programas GRATIS para tu computadora que te ayuden a hacer cálculos matemáticos esto te puede servir.

En esta página puedes encontrar programas para MS-DOS, MS-Windows, Pocket PC, Linux, Macintosh y Palm.

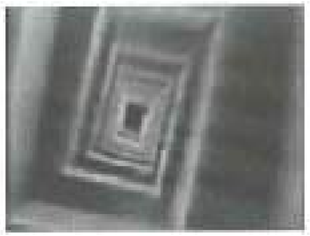
La **Advantix Calculador 3.0** está disponible para MS-Windows, y te sirve para estudios de álgebra, trigonometría, cálculo, etc. Puede resolver expresiones matemáticas que impliquen números complejos, derivar, integrar y muchas más cosas útiles. **MathGraph 1.02**, para Palm, es una calculadora gráfica-algebraica. Para resolver derivadas parciales tienen el **FlexPDE 3.10** para Macintosh.

Estos fueron algunos ejemplos de lo que puedes encontrar, si quieres saber más, la página de Internet es: http://www.matematicas.net/paraiso/soft.php

A quienes se les complica el cálculo, que no entienden qué diablos es un límite y no saben por qué la integral es una simple área, son a los que les puede interesar este CD.

El llamado **Análisis funcional** es un disco que contiene conceptos muy básicos (pero muy importantes) del cálculo diferencial e integral. Aquí se explica perfectamente qué es un límite, cómo se calcula, qué es una integral indefinida, cuáles son las reglas de derivación, etcétera. Además de fragmentos de historia adecuados a cada tema. Es un disco que contiene explicaciones, ejemplos interactivos y ejercicios. Es ideal para personas interesadas en estudiar la carrera de matemáticas, actuaría y economía, así como para estudiantes de relaciones internacionales y ciencias políticas.

Acro



Me han calificado de acrofóbico. ¡Qué equivocados están todos! No es miedo a las alturas el que me impulsa a huir, por el contrario, es la fascinación por ellas la que me aleja. La gravedad y la geometría de las líneas convergentes a un místico punto de fuga ejercen en mí una seducción tal que pareciera que el abismo me invita a caer en él.

La misma perspectiva puede verse en las calles, pero no hay fuerza que nos llame al infinito. Cierro los ojos. Me imagino al mundo, no de cabeza como los demás, sino de lado: en una rotación perfecta de 90°, entonces puedo caer al punto de fuga.

Pocos hombres saben cómo van a morir, yo ya lo decidí. Aún no decido cuándo, sólo sé que no ahora, porque aquellas caídas son sólo por una vez y, por lo tanto, deben ser perfectas. Me recreo imaginando distintas formas de precipitarme a la tierra, pero todavía no termino de planear como será *la* caída. Por eso huyo, porque temo que un caprichoso impulso adelante el momento.

Es difícil comprenderme, lo sé; la mayoría de las personas sueñan con volar, mientras yo fantaseo con tener mil vidas para caer mil veces. Recuerden cuando eran niños y se balanceaban en el columpio, moviendo las piernas para atrás y para delante en sincronía con el movimiento pendular, no nos importaban las leyes de física, sabíamos que así podíamos llegar más alto en cada oscilación. Cuando el columpio se mecía e íbamos hacia abajo el vacío nos invadía desde el interior de nuestras entrañas manifestándose primero en el estómago y luego se difundía en el resto del cuerpo. Los distintos psicólogos que me han tratado concuerdan en que desarrollé una adicción fisiológica a esa sensación, me recomendaron practicar paracaidismo. Pero eso no es entregarse al abismo, es sólo visitarlo. Yo quiero fundirme en su belleza, aniquilarme, fugarme en él; ¡que la explosión de mis vísceras y mis huesos fragmentados lo constaten!

Daniela Zenteno Langle
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM
danielaz@hotmail.com

ITAM la carrera de tu vida

Licenciaturas

- Actuaría
- Administración
- Ciencia Política
- Contaduría Pública y Estrategia Financiera
- Derecho
- Economía
- Matemáticas Aplicadas
- Relaciones Internacionales

¡Ven y descubre que la gente ITAM es gente como tú!

Ingenierías

- Ingeniería en Computación
- Ingeniería Industrial
- Ingeniería en Telemática

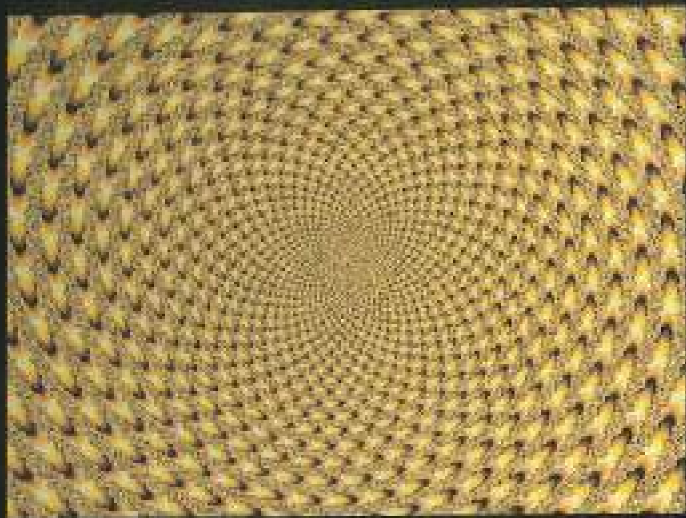
Visítanos en: **http://aspirantes.itam.mx**

BECAS ITAM
Uno de cada tres alumnos cuenta con ayuda financiera.

ITAM
EXCELENCIA ACADÉMICA

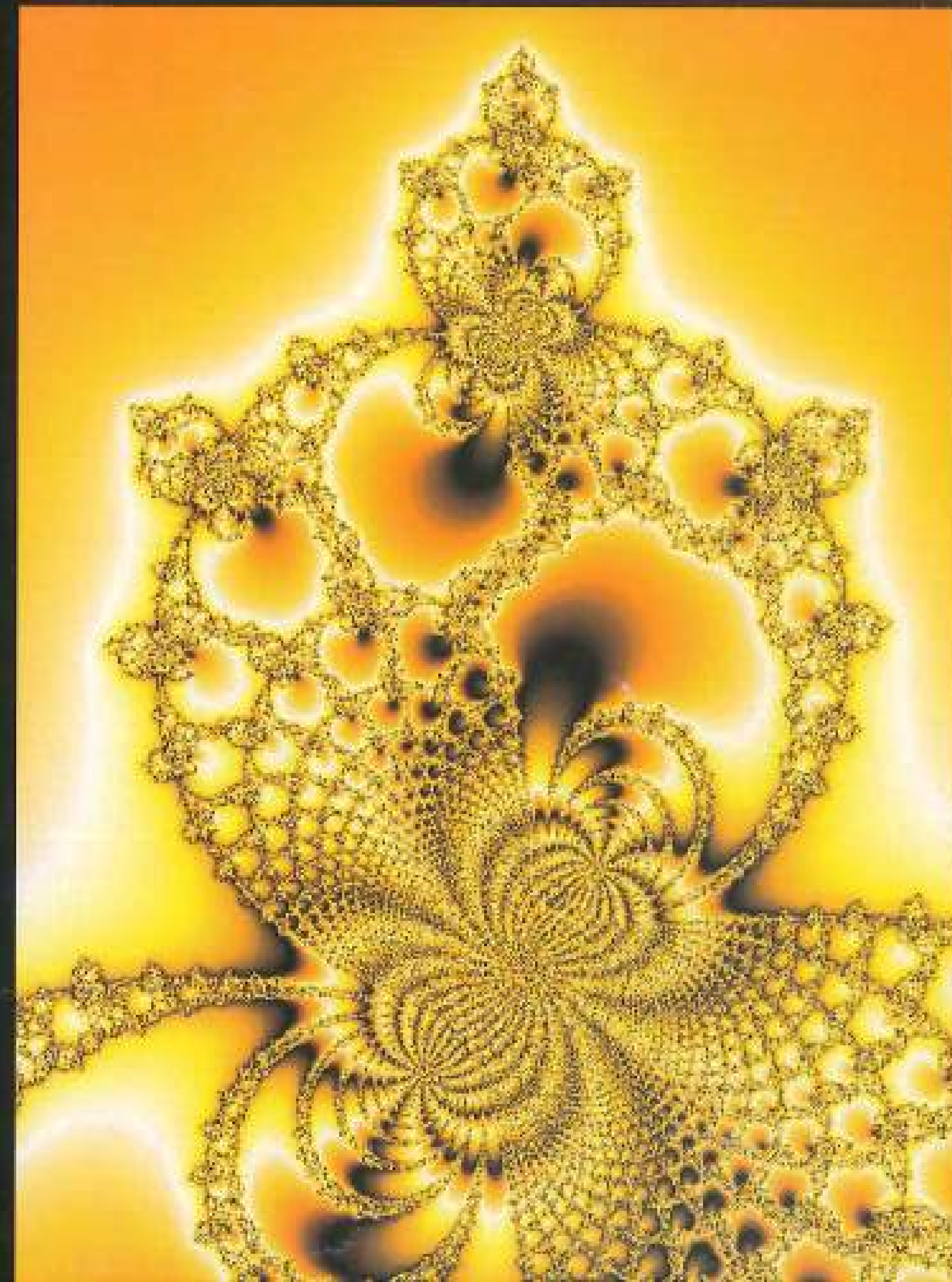
5628.4028 @ informes@itam.mx

www.itam.mx



Ondas.
Jesús Ortega

Laberintos e infinitos



Número 7