Índice

Editorial

Ludoteca espiriforme

Epístola de la ciencia

Reloj o perfecta sincronía

Un paseo por el quéhacer

No olvides buscar a Fibo

http://laberintos.itam.mx
laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx
En la portada: *"Moon over Miró" de Dennis Wilen*
http://www.spacebrothers.com/fractals

Editorial

Creación

El laberinto se despierta otra vez y se escucha el temblor de su tierra. Su memoria le pide llenar los vacíos. Con colores desconocidos se levanta, cruje y la llama. Ella lo siente, se resiste a ir a lo desconocido pero su curiosidad inevitable la lleva hacia él.

Ella es todas las formas, colores, texturas y sonidos. Con sus pies de sal lo toca por primera vez. El laberinto se transforma, se deforma y se incorpora; comienza a cubrir sus espacios con todas las figuras que ella crea.

Todas las formas se vuelven parte de él fundiéndose en caminos visuales, musicales, compuestos de distintos elementos, para dar lugar al mundo en que vivimos.

Se terminó de imprimir Otoño de 2003, en la imprenta:
I. M. Impresores S. A. de C. V.
Andrés Molina Enríquez 825, Col. San Andrés Tepetilco, Iztapalapa, C. P. 09440.
El tiraje fue de 1500 ejemplares.

Esta revista es gratuita y se publica trimestralmente.

Sobre la botella de Klein y algunos de sus "amigos"

Dr. Sergio Macías
Instituto de Matemáticas, UNAM.
sergiom@mate.unam.mx

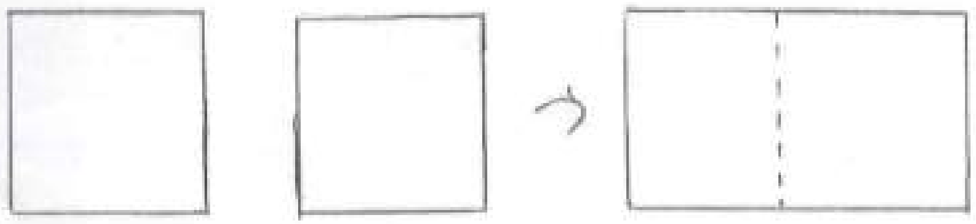
Una de las principales características de los científicos es la "curiosidad", la cual los lleva a hacerse preguntas y éstas a desarrollar técnicas para resolverlas, así como crear "nuevos" objetos de estudio a partir de los ya conocidos. En particular, los matemáticos investigan sus objetos con la "estructura matemática" de la cual disponen. Una de las ramas de las matemáticas es la *topología*. Para describirla, transcribimos lo que A. W. Tucker y H. S. Bailey dijeron en 1950 [3]:

> *"La topología es la rama de las matemáticas*
> *que trata de las propiedades de posición*
> *que son invariantes por cambios en tamaño*
> *o forma. Sus objetos están constituidos*
> *por superficies, redes y muchas otras*
> *figuras. Tal vez el modo más fácil de definir*
> *propiedades topológicas consiste en*
> *decir que son propiedades geométricas*
> *que permanecen inmutables a pesar*
> *de estiramientos o encorvamientos.*
> *La topología está llena de paradojas*
> *aparentes e imposibilidades aparentes*
> *y es, probablemente, más divertida*
> *que cualquier otra rama de las matemáticas".*

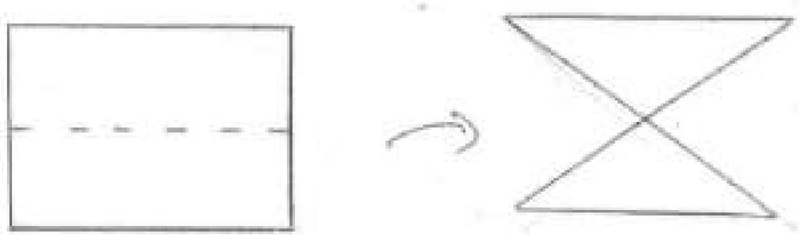
Pensaremos que los objetos geométricos que consideraremos en este trabajo están hechos de un hule muy maleable, lo cual nos permitirá estirarlos o encogerlos. A las partes más pequeñas e indivisibles de los objetos las llamaremos *puntos*.

Una de las técnicas usadas en topología es la de *pegado*, formalmente llamada *identificación*, la cual consiste en "pegar" puntos de uno o varios objetos utilizando reglas específicas.

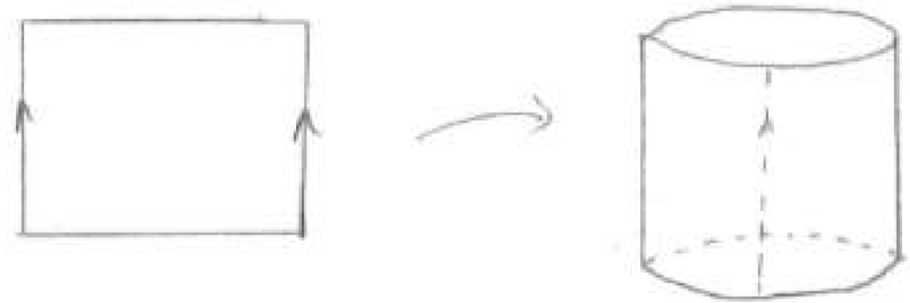
Por ejemplo, supongamos que tenemos dos rectángulos y que los queremos pegar por uno de sus lados. Notemos que lo que resulta es un rectángulo "más grande", lo cual significa, desde el punto de vista topológico, que no se ha obtenido nada nuevo.



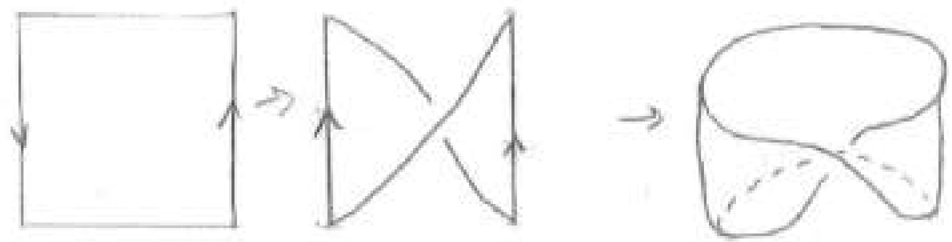
Ahora supongamos que tenemos un rectángulo y que deseamos identificar todos los puntos de un segmento de recta paralelo a sus lados y que cruza todo el rectángulo en uno solo. Notemos que, en este caso, lo que se obtiene es dos triángulos pegados por uno de sus vértices. Observemos que, en esta ocasión, sí se obtiene un objeto distinto al inicial, pues si quitamos el vértice común de los triángulos lo que nos queda tiene "dos piezas", mientras que si quitamos cualquier punto del rectángulo siempre obtendremos algo de "una sola pieza".



Supongamos nuevamente que tenemos un rectángulo, esta vez de "altura" uno, y que queremos pegar el lado izquierdo con el lado derecho. Notemos que hay dos maneras de hacerlo. Una de ellas es identificar los puntos del lado izquierdo con los puntos del lado derecho que están a la misma "altura", obteniendo un cilindro.



La otra manera es girar el lado izquierdo 180 grados y luego pegar los puntos del lado izquierdo con los del lado derecho.



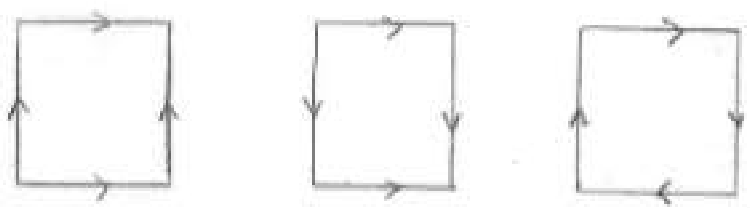
El objeto que resulta de este proceso se llama *banda de Möbius* (Descubierta en 1885 por el matemático alemán A. F. Möbius). Esta banda resulta ser un objeto que tiene solamente una cara. Por más vueltas que le demos a la superficie siempre encontraremos una única cara continua y un solo borde (nótese que el cilindro tiene dos caras y dos bordes). Tiene, además, la siguiente propiedad curiosa: si cortamos la banda a lo largo de una línea trazada sobre ella, por su mitad, y "paralela" a su borde, lo que resulta es un objeto de ¡una sola pieza! Invitamos al lector a que haga dicho experimento y se convenza de lo que se afirma. Esta propiedad ha sido expresada en un pequeño poema:

A mathematician confided
The Möbius band is one–sided,
And you'll get quite a laugh
If you cut one in half.
For it stays in one piece when divided.

(Un matemático susurró
Que la banda de Möbius tiene una sola cara,
Y que tú reirás mucho
Si la cortas por la mitad.
Pues se queda de una pieza al dividirla)

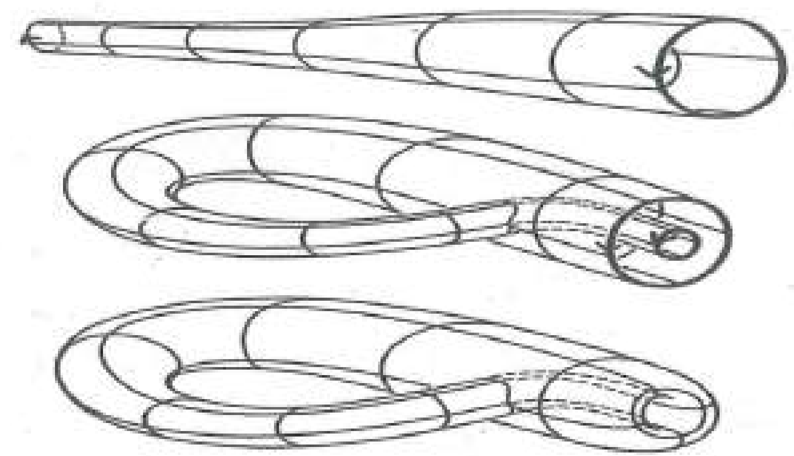
Ahora supongamos que queremos pegar los cuatro lados de nuestro rectángulo. Tenemos, esencialmente, cuatro maneras distintas de hacerlo. La primera sería identificar los cuatro lados en un solo punto obteniendo, como resultado, una esfera.

Las otras tres maneras consisten en pagar los lados paralelos como se indica, con flechas, en las siguientes figuras:



Consideremos primero la figura de la izquierda. Al pegar los lados horizontales obtenemos un cilindro. Luego tenemos que pegar las dos circunferencias en la forma que indican las flechas. Al hacer esto, resulta que hemos construido una "cámara de llanta". A este objeto se le conoce con el nombre de *toro*.

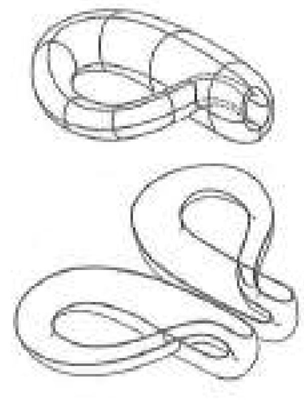
Ahora pensemos en la figura de en medio. El objeto que se obtiene se conoce como la *botella de Klein* (inventada en 1882 por el matemático alemán F. Klein). El primer paso de la construcción es igual que en el caso anterior. Se identifican los lados horizontales para crear un cilindro. Notemos que, ahora, hay un pequeño problema, pues las circunferencias que necesitamos pegar tienen sus flechas en sentidos opuestos. Esto nos impide hacer un pegado "directo" como en el caso del toro. Una forma de "solucionar" este problema y tener una representación en el espacio tridimensional es hacer un pequeño agujero en el cilindro, cerca de una de las circunferencias, y por allí meter el otro extremo del cilindro. De esta manera, la orientación de las flechas sí coincide y podemos pegar ambas circunferencias.



Aquí hemos hecho trampa, ya que cortamos un pedazo de nuestro espacio. Realmente, la botella de Klein "no vive" en el espacio tridimensional que nos rodea, pero "sí vive" en el espacio equivalente de cuatro dimensiones (esto es, en tal espacio podemos hacer el pegado de las circunferencias sin necesidad de cortar ningún pedazo de la botella).

Un hecho curioso es que la botella de Klein se puede obtener pegando dos bandas de Möbius por sus bordes. Para convencerse de esto, basta hacer un corte transversal a la botella.

Este hecho ha sido expresado en un pequeño poema:



A mathematician named Klein
Thought the Möbius band was devine
Said he, "If you glue
The edges of two,
You'll get a weird bottle like mine".

(Un matemático llamado Klein
Pensó que la banda de Möbius era divina
Dijo él: "Si tu pegas
Los bordes de dos,
Obtendrías una extraña botella como la mía.)

La descripción del pegado de la figura de la derecha es más complicada. Lo que resulta es lo que se conoce como el *plano proyectivo*.

Tanto la banda de Möbius como la botella de Klein y el plano proyectivo son ejemplos de "superficies no orientables", la primera con borde y las otras dos sin él. El lector interesado en saber un poco más sobre superficies puede consultar [1] y [2].

Bibliografía

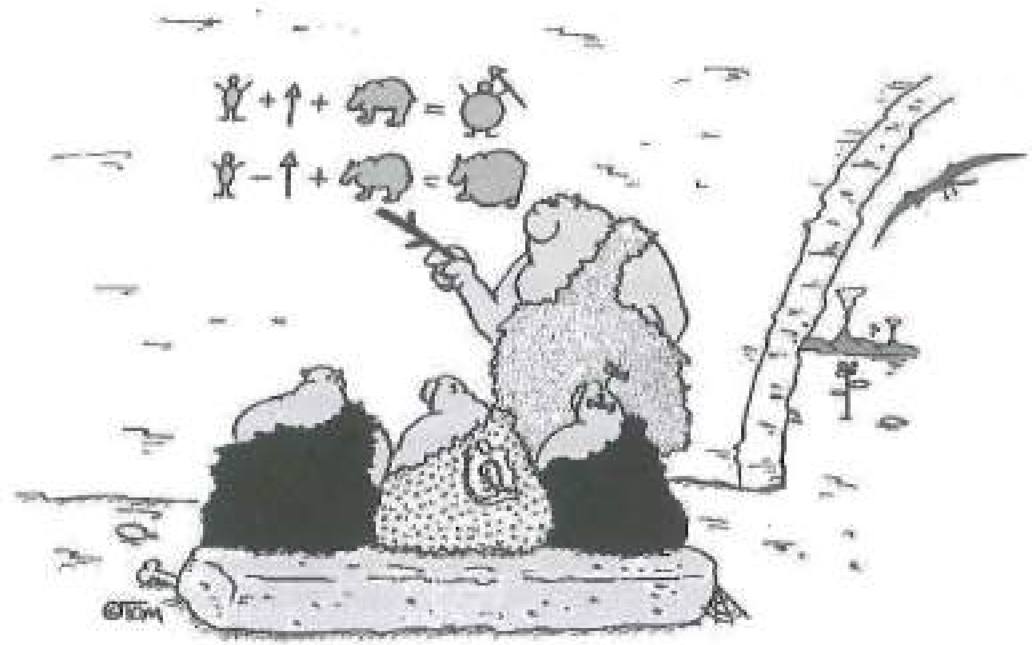
[1] A. Illanes, *La Caprichosa Forma de Globi´on*, La Ciencia para Todos, 168, SEP–CONACyT–FCE, 1999.

[2] E. Micha, *Introducción a la Topología, Clasificación de Superficies*, 3er Coloquio del Departamento de Matemáticas del Centro de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, la Trinidad, Tlaxcala, Agosto de 1983.

[3] A. W. Tucker y H. S. Bailey, Jr., Topología, en *Matemáticas en el Mundo Moderno, Selecciones de Scientific American* Editorial Blume, Madrid y Barcelona, 1974, págs. 151–158.

[4] J. R. Weeks, *The Shape of Space*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 96, Marcel Dekker, New York y Basel, 1985.

El rincón del humor



* Un verdugo a su víctima: «Te voy a torturar durante tanto tiempo que te va a parecer un doctorado».

* Para entender lo que es la recursividad, antes hay que entender lo que es la recursividad.

* Hay 10 tipos de personas: Las que entienden número binarios y las que no.

* ¿Cuál es el animal que tiene entre 3 y 4 ojos? El pi-ojo.

e y la trascendencia

Olmo Ignacio Barragán Córdova
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM.
olmogorov@yahoo.com.mx

¿Qué es un número trascendente?

Para nuestro propósito dividiremos a los números reales en dos clases de números: **algebraicos y trascendentes.** Los números reales trascendentes se definen por oposición o contraste a los algebraicos, es decir, un número real es trascendente si no es algebraico. Por otra parte, un número es algebraico si es solución de la siguiente ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

para algunos $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbf{Z}$. En otras palabras, los números algebraicos son aquellos que son raíces de polinomios con coeficientes enteros donde el término independiente (a_0) no necesariamente es diferente de cero.

Es fácil dar ejemplos de números algebraicos, por ejemplo, los números con que contamos (números naturales), sus negativos, las fracciones, etc. Pero un número algebraico puede también tener una forma muy complicada, por ejemplo:

$$\frac{5}{4}\sqrt[71]{\sqrt{10-3\sqrt{9-\sqrt{\tfrac{1}{7}}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{11}{57}-\sqrt[7]{8}-\sqrt[6]{20+\sqrt{7}}}}}$$

Breve Reseña Histórica

En el siglo XVIII no se realizó un esfuerzo real para aclarar el concepto de número irracional aunque se hicieron algunos progresos. Alrededor de 1737 Leonhard Euler mostró que los números e y e^2 son irracionales mientras que Johann Lambert, motivado por encontrar la cuadratura del circulo, hizo lo propio con π. Sin embargo no sería sino hasta finales del siglo XIX que se demostrara que dichos números son trascendentes. Los números trascendentes no pueden ser vistos como raíces de polinomios de coeficientes enteros cuyo término libre se puede suponer distinto de cero y fueron llamados así por Euler quien dijo: "ellos trascienden el poder de los métodos algebraicos".

La distinción entre números algebraicos (entre los cuales, reiterando, están todos los racionales y algunos irracionales) y trascendentales fue claramente reconocida por

Euler en 1744. Conjeturó que el logaritmo en una base racional de un número racional debía ser racional o ¡trascendente! Sin embargo en su época no se logró mostrar que existían números trascendentales. Así, este problema permaneció abierto sin respuesta por alrededor de un siglo.

A finales del siglo XVIII, en distintos trabajos donde se necesitaba la resolución de ecuaciones, se reveló que no todos los números algebraicos irracionales se podrían obtener con operaciones algebraicas en números racionales. Esto renovó el interés por saber si existían números trascendentes. Así el problema de si e o π eran trascendentes o algebraicos continuaba atrayendo a los matemáticos.

El problema de la existencia de los números trascendentes fue finalmente resuelto en 1844 por Joseph Liouville, quien mostró que los números de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots,$$

donde los a_i, con $i = 1, 2, \ldots$ son arbitrariamente enteros entre 0 y 9, son trascendentes. Liouville también mostró criterios más generales para encontrar números trascendentes pero aún no resolvió el problema de si π o e son trascendentes.

La trascendencia de e fue probada por Charles Hermite en 1873. Pero Hermite desistió del intento de probar la trascendencia de π. Sin embargo, posteriormente Ferdinand Lindemann utilizando un argumento en esencia idéntico al que Hermite usó para mostrar la trascendencia de e, mostró en 1882 que π también era trascendente. La prueba de que π es trascendente puso fin a uno de los problemas más famosos de construcción geométrica.

Actualmente se sigue desconociendo la trascendencia de algunas constantes famosas. La más relevante de ellas es un número muy útil en el estudio de algunas funciones muy importantes en el análisis matemático: la afamada γ de Euler. Este número se define como:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} + \log n\right)$$

y se ha conjeturado que $\gamma = 0.577216$ se trata de un número trascendente, pero los laureles aún esperan a quien resuelva este problema.

Recordemos ¿Qué es e?

El primer estudio sistemático del número e, junto con el número π, se divulga en 1748 con la publicación de *Introductio in Analysin Infinitorum* del prominente matemático Euler. En ese libro por primera vez se muestra cómo una *suma infinita* que crece monótonamente se puede usar para definir un nuevo número real.

Para definir al número e utilizando, precisamente, una suma infinita es necesario introducir antes el concepto del factorial de un número. Se denota al factorial del número natural n como $n!$ y se calcula de la siguiente manera:

$$n! = n\cdot(n-1)! = \cdots = n\cdot(n-1)\cdots 1\cdot 0!,$$

donde por convención $0!=1$. Por ejemplo, si pretendemos calcular n con $n=5$ tendríamos que:

$$5! = 5\cdot 4! = \cdots = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0! = 120.$$

Podemos notar inmediatamente que $2^n < n!$ cuando $n>3$. Veamos la elemental prueba de este hecho. La demostración se hace por una técnica muy usual: la inducción matemática[1]. Caso base o paso 1: $n=4$, $2^4=16<24=4!$.

Para hacer inducción suponemos que el resultado es cierto para $n=m$, hay que usar como hipótesis que $2^m<m!$ y probar que $2^{m+1}<(m+1)!$ Mostremos entonces esto último: $2^{m+1}=2\cdot 2^m<2\cdot m!<(m+1)\cdot m!=(m+1)!$ dado que $2<3<m$. Habiendo así introducido el concepto del factorial de un número estamos listos para definir al número e o constante de Euler de la siguiente manera:

$$e = \tfrac{1}{0!}+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\cdots+\tfrac{1}{n!}+\cdots$$

Como sabemos que $2n<n!$ para $n\geq 4$ podemos estimar el valor de e para asegurar que la suma que lo define no sea igual a infinito.

Procediendo a efectuar dicha estimación tenemos que por una parte, $1+1+\frac{1}{2}=2.5<e$.

Además:

$$\begin{aligned} e &= 1+1+1/6+\sum_{n=4}^{\infty}\tfrac{1}{n!} \\ &< 1+1+1/6+\sum_{n=4}^{\infty}\tfrac{1}{2^n} \\ &= 1+1+1/6+\tfrac{1}{2^4}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{2^n} \\ &= 1+1+1/6+\tfrac{1}{2^4}\cdot 2 = 2.792 \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto, que $2.5<e<2.792$ de donde resulta que e es distinto que infinito. Ahora que ya sabemos qué es e mostremos que no es un número racional, esto es que no lo podemos escribir como una fracción p/q, donde p y q son números enteros.

[1] En este tipo de demostración se toma un caso base, se pone por hipótesis un caso general y se trata de que partiendo de ésta se concluya que el enunciado es verdadero para el número natural consecutivo.

Proposición: e es irracional.
Prueba:

Primero estimemos el valor de $(e-S_m)$, donde $S_m=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{m!}$

$$\begin{aligned} e-S_m &= \tfrac{1}{(m+1)!}+\tfrac{1}{(m+2)!}+\cdots \\ &< \tfrac{1}{(m+1)!}\left[\tfrac{1}{m+1}+\tfrac{1}{(m+1)^2}+\cdots\right] \\ &= \tfrac{1}{(m+1)!}\,\tfrac{m+1}{m}=\tfrac{1}{m!m}. \end{aligned}$$

Como $e>S_m$ $\forall m\in\mathbf{N}$ se tiene que $0<e-S_m<\frac{1}{m!m}$. Supongamos que e es racional, entonces $e=p/q$ donde $p,q\in\mathbf{N}$. Luego $q!e$ y $q!S_q$ son enteros pero por la estimación realizada $0<q!(e-S_q)<1/q<1$. Esto implica que hay un entero entre 0 y 1, lo cual es una contradicción. □

Se expondrán a continuación algunos de los puntos más importantes utilizados en la demostración simplificada de David Hilbert de que e es un número trascendente para presentar, posteriormente, un esbozo de ella. En esta demostración se emplea una función conocida como la *función gama*

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,$$

por brevedad sólo se presentarán y comentarán algunas de las propiedades de esta interesante función.

Proposición. (Propiedades de la función Gama.)
(a) $\Gamma(\cdot)$ es continua.
(b) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
(c) $\Gamma(n+1)=n!$, para $n=1,2,3,\ldots$ y $\Gamma(1)=1$.
(d) $\log\Gamma(\cdot)$ es convexa en $(0,\infty)$.

Para probar la proposición anterior se requieren tres lemas: El primer Lema nos dice: "*Si $f(x,t)$ es continua en x_0 entonces* $F(x)=\int_a^{\infty}f(x,t)dt$ *es continua siempre*

Otto Hölder

que la integral exista". Dicho Lema se usa para mostrar el inciso (a) de la proposición. Habría que ver primero que la integral que define a $\Gamma(x)$ es un número real (finito desde luego) para cada x que consideremos. El segundo lema que necesitamos es el que indica cuándo podemos extender el teorema de integración por partes para las integrales impropias. Esto es cuando el intervalo de integración no está acotado. Este lema se emplearía para mostrar la parte (b) la cual implica al inciso (c). El tercero y último lema es la importantísima desigualdad de Hölder. Aunque enunciarla como lema (debido a que en esta demostración sólo se usa para mostrar el inciso (d)) le resta importancia, esta desigualdad tiene una vasta cantidad de aplicaciones.

La desigualdad de Hölder (Para la integral de Riemann).

Sea (α, β) un intervalo real no necesariamente acotado. Si $\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx$ y $\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx$ existen, donde $0 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $\int_\alpha^\beta |(f \cdot g)(x)| dx$ existe y además

$$\int_\alpha^\beta |(f \cdot g)(x)| dx \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

Finalmente, antes de dar el bosquejo de cómo sería la prueba de la trascendencia de e, hagamos un comentario sobre la propiedad de $\Gamma(\cdot)$ tratada en el inciso (d).

Decimos que una función f es convexa si para cada pareja x, y en el dominio de f se tiene que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, donde $0 \leq \lambda \leq 1$. Si una función es log-convexa entonces es muy suave, esto es que se puede derivar tantas veces se quiera y la derivada resultará continua.

Enunciemos entonces el teorema de la trascendencia del número e y esbocemos su prueba.

Teorema: e es trascendente

La prueba se hace por contradicción, esto es, se postula que e no es trascendente y se llega a una incoherencia.

Si suponemos que e no es trascendente entonces existe un polinomio tal que

$a_n e^n + \cdots a_1 e + a_0 = 0, a_0 \neq 0$ (*)

para algunos enteros $a_0, \ldots a_n$. Lo que se hace ahora es aproximar de manera simultánea a $e, e^2, \ldots, e^n$ por racionales y números pequeños. De tal manera que $M, M_1, \ldots, M_k$ son enteros y $\in_1, \ldots, \in_n$ son números pequeños, tales que $e = \frac{M_1 + \in_1}{M}, e^2 = \frac{M_2 + \in_2}{M}, \ldots e^n = \frac{M_n + \in_n}{M}$.
Sustituyendo estos valores en (*), multiplicando por M y agrupando términos obtenemos que $[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [\in_1 a_1 + \cdots + \in_n a_n] = 0$ (**)
La contradicción se va a obtener porque se escoge M suficientemente grande, tal que el primer sumando entre corchetes en (**) es no cero y por otra parte se puede elegir a $\in_1, \ldots, \in_n$ tan pequeñas que $|\in_1 a_1 + \cdots + \in_n a_n| < 1$ por lo cual la suma (**) no puede ser cero.

La idea de la prueba es muy directa. Si algún lector está interesado en leerla puede consultar [S] o en su defecto escribirme para pedirme la versión completa del texto que incluye tanto esta prueba como las pruebas de la proposición de las propiedades de $\Gamma(\cdot)$ y de los lemas en que se apoya tal demostración.

Bibliografía

[B] Robert G. Bartle. *The Elements of integration and Lebesgue Measure.* Oxford University Press. USA c1996.

[C] Richard Courant. *What is mathematics?* Oxford University Press. USA c1996..

[K] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press. USA c1972.

[KF] Kolmogorov & Fomin. *Introductory Real Analysis.* Dover. USA c1970.

[R] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition. McGraw-Hill International Editions. USA c1976.

[S] Michael Spivak. *Calculus.* Publish or Perish Inc. USA c1980.

El pastor conflictuado

Un pastor tiene que pasar un lobo, una cabra y una lechuga a la otra orilla de un río, dispone de una barca en la que sólo caben él y una de las otras tres cosas. Si el lobo se queda solo con la cabra se la come, si la cabra se queda sola con la lechuga se la come, ¿cómo debe hacerlo?

De edades

Un encuestador se dirige a una casa donde es atendido por una mujer: ¿cantidad de hijos? Tres dice ella ¿edades? El producto de las edades es 36 y la suma es igual al número de la casa, responde. El encuestador se va pero al rato vuelve y le dice a la mujer que los datos que le dio no son suficientes; la mujer piensa y le dice: tiene razón, la mayor estudia piano. Esto es suficiente para que el encuestador sepa las edades de los hijos. ¿Cuáles son?

El prisionero

El alcalde de una cárcel informa que dejará salir de la prisión a una persona al azar para celebrar que hace 25 años es alcalde. Eligen a un hombre y le dicen que quedará libre si saca de dentro de una caja una bola blanca, habiendo dentro 9 bolas negras y sólo 1 blanca. El prisionero se entera por un chivatazo que el alcalde pondrá todas las bolas de color negro, al día siguiente le hace el juego y el prisionero sale en libertad. ¿Cómo ha conseguido salir de la cárcel si todas las bolas eran negras?

Secuela de ¿En verdad existe algo así?

Dr. César Luis García
Departamento de Matemáticas, ITAM
clgarcia@itam.mx

En el número 4 de Laberintos e infinitos los asiduos y fieles lectores de esta revista disfrutamos, de entre otros, el artículo sobre el conjunto de Cantor de Guillermo Grabinsky: ¿En verdad existe algo así? ([G]). Si quieres, corre a tu librero y desempolva ese ejemplar porque aquí te contaré algo más sobre el conjunto de Cantor. Aprovechando el viaje trae papel y lápiz . . . ¿listo?

Bueno, comencemos con un reto. En tu hoja de papel dibuja un cuadrado de lados de longitud uno. Piensa, por ejemplo, que tu cuadrado está en el plano cartesiano y un lado descansa sobre la parte positiva del eje x, con esquina en (0,0). Otro lado, si tu cuadrado está derechito, estará sobre el eje y. Así, tu cuadrado será el conjunto $\{(x, y)\in \Re^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Afila tu lápiz y el reto es tratar de dibujar una curva *sin salir* del cuadrado con las siguientes propiedades:

1. La curva es la gráfica de una *función* que empieza en el lado izquierdo del cuadrado y termina en el lado derecho.

2. Al dibujar la curva no puedes despegar el lápiz de la hoja, es decir, deberás pintar una curva *continua*.

3. La curva debe ser *creciente* (si estás en un punto de la curva y te mueves hacia la derecha estarás trazando hacia arriba u horizontalmente).

4. Cuando hayas pintado la curva, ésta deberá tener longitud 2.

Hacemos una no tan breve pausa para darte tiempo a que hagas algunos intentos y pienses el problema un poquito . . . ¿listo?

Okey, ¿qué reportan tus intentos? Nada ¿verdad? A mí me pasó igual: empecé por entender y aclarar cada una de las condiciones que debe satisfacer la curva, por ejemplo, recordar cómo se mide la longitud de una curva. En cálculo vemos que la longitud de una curva se aproxima por curvas poligonales determinadas por subdivisiones del intervalo $[0,1]$, es decir, se escogen puntos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ y la poligonal es la unión de los segmentos de recta que unen los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. La longitud de la curva se define como el "máximo" (el *supremo*, si éste existe) de las longitudes de todas las poligonales posibles. En el caso de una curva $y = f(x)$, con f cumpliendo las condiciones 1 - 4, es fácil ver que la longitud de la curva sería a lo más $1 + f(1) - f(0)$ ¿no? Luego a pintar algunas curvas: curvas que son todo el tiempo horizontales no sirven porque tienen longitud uno, no se valen curvas con segmentos verticales porque dejan de ser función. Después de un rato intenté algo como tomar una curva que empiece horizontal sobre el eje x y cuando casi tenga longitud uno, la levanto hacia el $(1,1)$, como tratando de pegarme a los lados de abajo y derecho del cuadrado que suman dos en longitud. "Esta curva está a tiro de piedra de tener longitud 2 y es creciente", me dije. En efecto, si tomo $f_n : [0,1] \to [0,1]$ (¿aún tienes tu papel para dibujarla?) definida por:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0, 1-1/n] \\ n(t-1)+1 & si \quad t \in [1-1-1/n, 1] \end{cases}$$

resulta que la longitud de f_n es $(1-1/n) + \sqrt{1-1/n^2}$ y esto casi es 2 si la n es muy grande; sin embargo queremos longitud exactamente 2.

En lo que iba por un cafecito pensé en $y = x^n$, $n \in \Box$, pero ¿cuál era la fórmula para calcular la longitud de una curva? ... ¡ah, sí! ... ¡uy! y eso ¿cómo se integrará? ... sepa, pero cualitativamente $y = x^n$ es como el ejemplo de arriba: son curvas crecientes de longitud casi dos si n es grande ... ¡chin! En el límite cuando n tiende a ∞ las curvas anteriores resultan en una función discontinua y además la longitud de la función límite se apachurra a 1.

Ejemplos van y ejemplos vienen pero la conclusión a estas alturas ya empezaba a ser que, o me consigo más papel para seguir haciendo pruebas o no hay tal curva o es alguno de esos ejemplos mafufos que los matemáticos inventan en sus intermezzos de cafecito.

Tomando mi cafecito agarré el *Laberintos 4* y en el artículo sobre el conjunto de Cantor, medio me cayó el veinte. ¿Será por aquí? A lo mejor algo como la *escalera de Cantor* funciona. Igual y sí pero ya va a empezar *Primer Plano*. Prendo la telera y en el primero de los dos intermedios me acuerdo del articulín de R. B. Darst sobre el conjunto de Cantor que tenía guardado por ahí [D]. Lo encuentro y la primera línea dice:

"Not every body is aware that a function can be continuous and increase from 0 at 0 to 1 at 1 and have its graph of length 2."

"¡Eureka!" Grité hacia mis adentros, porque eso de salir desnudo dando gritos por ahí ya no es usanza de estos tiempos (aquí me desmienten los del Movimiento de los 400 Pueblos, pero bueno). No pues sí, tenía que ser así: agarra el conjunto de Cantor ¿te acuerdas? se toma el intervalo $F_0 = [0,1]$ y se le quita el tercio medio $(1/3, 2/3)$ te queda el conjunto $F_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$ luego de cada subintervalo de F_1 quitas los tercios medios y te queda $F_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$. Ahora quitas los tercios medios de cada subintervalo de F_2 para obtener F_3 y así sucesivamente. El conjunto de Cantor es la intersección $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ (ver [G]).

Ya con el conjunto de Cantor, la escalera de Cantor $\xi : [0,1] \to [0,1]$, se construye como sigue:

¿Papel y lápiz listos? En $x = 0$, $\xi(0) = 0$ y en $x = 1$, $\xi(1) = 1$. Ahora ponemos los peldaños de la escalera. Estos irán sobre los intervalos, con extremos incluidos, que eliminamos al construir el conjunto de Cantor. Así, el primer peldaño va sobre el intervalo $[1/3, 2/3]$.

Definimos ξ sobre $[1/3, 2/3]$ como el promedio de los valores de ξ en los extremos del subintervalo de F_0 que contiene a $[1/3, 2/3]$ (en este caso el $[0,1]$), es decir, como $\xi(0)=0$ y $\xi(1)=1$ entonces $\xi(x)=1/2$ si $x \in [1/3, 2/3]$. Los siguientes dos peldaños van sobre los intervalos $[1/9, 2/9]$ y $[7/9, 8/9]$. El subintervalo de F_1 que contiene a $[1/9, 2/9]$ es $[0, 1/3]$ y $\xi(0)=0$, $\xi(1/3)=1/2$. Como el promedio de estos dos valores es 1/4 entonces $\xi(x)=1/4$ si $x \in [1/9, 2/9]$. Análogamente, si $x \in [7/9, 8/9]$, $\xi(x)=3/4$ (el promedio de 1/2 y 1). Esto ya suena a proceso iterativo: ¿puedes decir dónde van y a qué altura están los siguientes cuatro peldaños? Bueno, continuamos iterativamente el procedimiento para poner todos los peldaños de la escalera, ¿capisci?

Resta por definir la escalera de Cantor sobre los puntos del conjunto de Cantor que no son extremos de intervalos "tercios medios". Nota que la suma de las longitudes de los peldaños de la escalera es apenas uno y lo que sigue será poner a la gráfica de ξ, la otra parte de longitud uno, usando un conjunto de ¡longitud cero! Bueno, tomemos un punto x en el conjunto de Cantor que no sea extremo de alguno de los intervalos que conforman algún F_n. Tenemos entonces que para cada $n \geq 0$, x está en uno y sólo uno de los 2^n subintervalos de F_n. Denotemos por $[a_n, b_n]$ a tal subintervalo. Nota también que sabemos el valor de ξ tanto en a_n como en b_n. No es difícil convencerse de que la sucesión $(\xi(a_n))_{n=0}^{\infty}$ es creciente y acotada superiormente y que $(\xi(b_n))_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y acotada inferiormente; aún más, $\lim_{n\to\infty} \xi(a_n) = \lim_{n\to\infty} \xi(b_n)$. Definimos entonces $\xi(x) = \lim_{n\to\infty} \xi(b_n)$. Así, ξ queda definida sobre todo el intervalo [0,1] y resulta continua y creciente (¿aún con papel y lápiz?).

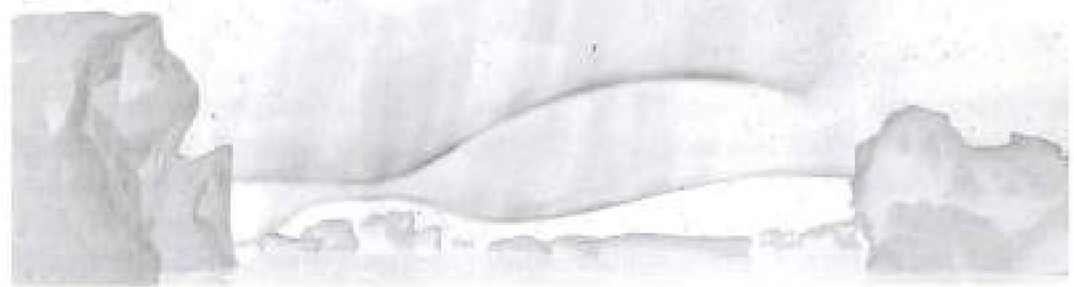
Para convencerte de que la longitud de la escalera de Cantor es dos, sabemos ya que a lo más es 2, porque ya has visto que la longitud de una curva creciente y continua sobre el intervalo [0,1] es a lo más $1+\xi(1)-\xi(0)$. Para ver que la longitud es al menos dos, volvamos a la construcción de los peldaños de la escalera. Si estamos en la k-ésima iteración y unimos los peldaños con segmentos de recta, esto da una función creciente y continua cuya longitud es fácil de calcular porque es una curva poligonal (da $\ell_k := 1-(2/3)^k + \left[(2/3)^{2k}+1\right]^{1/2}$). Un momento de reflexión te convencerá que la escalera de Cantor tiene longitud mayor a ℓ_k para cualquier k luego debe tener longitud al menos dos (nota que $\lim_{k\to\infty} \ell_k = 2$).

La escaleriux tiene algunas otras propiedades interesantes, por ejemplo, su derivada es cero (excepto en los puntos del conjunto de Cantor donde no existe) y sin embargo está lejos de ser una función constante (¡es creciente!). También una pequeña modificación de ξ, a saber $\phi(x) = x + \xi(x)$, da una función continua, estrictamente creciente, que envía un conjunto de longitud cero (el de Cantor) en un conjunto de longitud uno (creando de la nada, pues). Peor aún: envía un subconjunto no vacío del conjunto de Cantor (que deberá tener longitud cero) en un conjunto al que ¡no se le puede asignar longitud alguna! ¿A poco hay de esos conjuntos? Pues sí, pero eso será material para una secuela de la secuela . . .

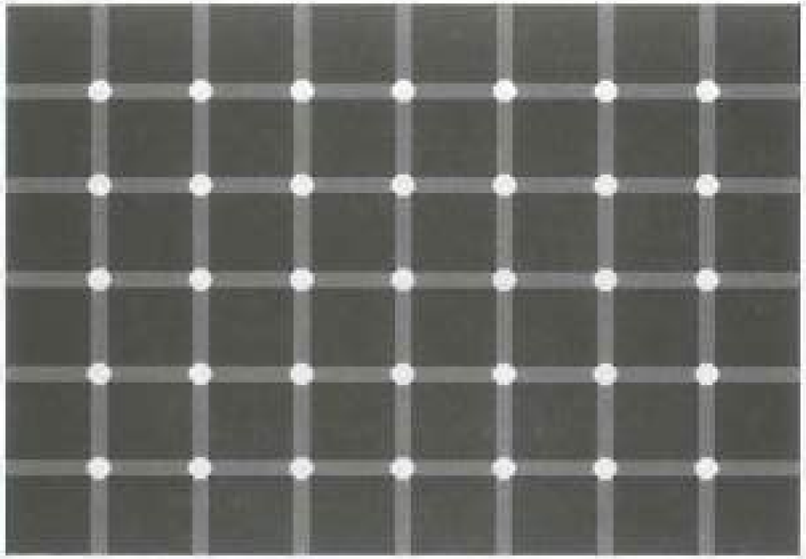
Referencias

[D] R. B. Darst, *Some Cantor sets and Cantor functions*, Mathematics Magazine 45 (1972), 2 - 7

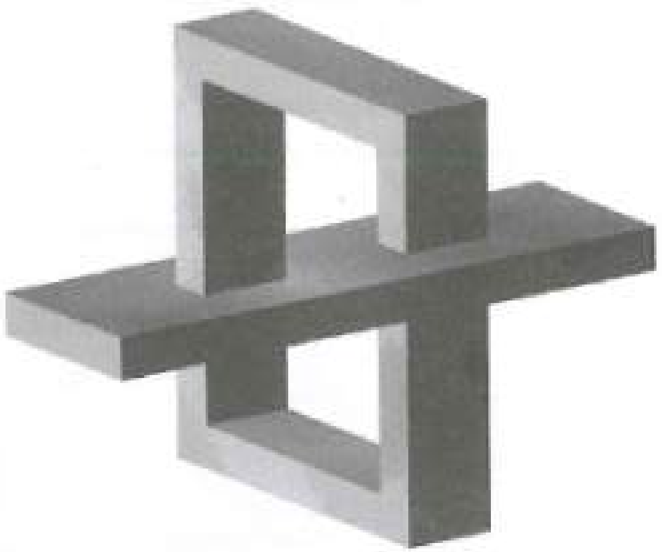
[G] G. Grabinsky , *¿En verdad existe algo así?*, Laberintos e infinitos 4 (2003), 3 - 4



¿De qué color son los puntos?



¿Puedes construir esta figura?



Completación del plano euclidiano

Ilán A. Goldfeder
Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM.
wallerstein20@yahoo.com.mx

Para Vicente.

¿Qué es una *axiomática*? Uno de los objetivos del matemático es describir ciertos objetos (como los números, figuras geométricas, etcétera). Pero a los matemáticos no nos interesa enunciar todas las propiedades de un objeto sino sólo un conjunto mínimo, a partir del cual podamos deducir, usando la lógica, el resto de las propiedades del objeto. A este conjunto mínimo de propiedades le llamamos *axiomática*.

Si queremos describir las propiedades de una hoja de papel infinita en la que podemos dibujar puntos y rectas (plano euclidiano), podríamos dar la siguiente axiomática:

A1. Por dos puntos cualesquiera pasa exactamente una recta.

A2. Existen al menos tres puntos no colineales.

A3. Por un punto exterior a una recta pasa exactamente una recta paralela a ésta (por paralela entendemos que no se intersectan en ningún punto). [Este axioma es lógicamente equivalente al quinto postulado que aparece en los *Elementos* de Euclides, que dice, a saber: "*Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos*"].

A4. Cada recta contiene a lo menos dos puntos.

Esta axiomática nos asegura la existencia de algunos puntos y algunas rectas en nuestro plano. Pongámosle nombres. El Axioma 2 nos dice que hay tres puntos (al menos) sean: **A**, **B** y **C**; y al conjunto que contiene a todas las rectas del plano llamémosle **P** (**A**, **B**, **C** están en ese conjunto pero pueden no ser los únicos). El Axioma 1 nos dice que por cada dos puntos hay una recta y ya que sabemos que hay tres puntos no colineales, podemos asegurar la existencia de al menos tres líneas; sean éstas: **m**, **n**, **o** y sea **L** el conjunto que las contiene (**m**, **n**, **o** están en ese conjunto pero pueden no ser las únicas). Sabemos que los puntos guardan cierta relación con la rectas. En particular: dado un punto **Q** y una recta **g** podemos decir si **Q** es punto o no de **g** (si **Q** no es punto de **g** diremos que **Q** es exterior a la recta). Llamémosle a esta relación **I**.

La terna <**P, L, I**> basta para representar a nuestro plano euclidiano, llamémosle **E**. Entonces **E** = <**P, L, I**>.

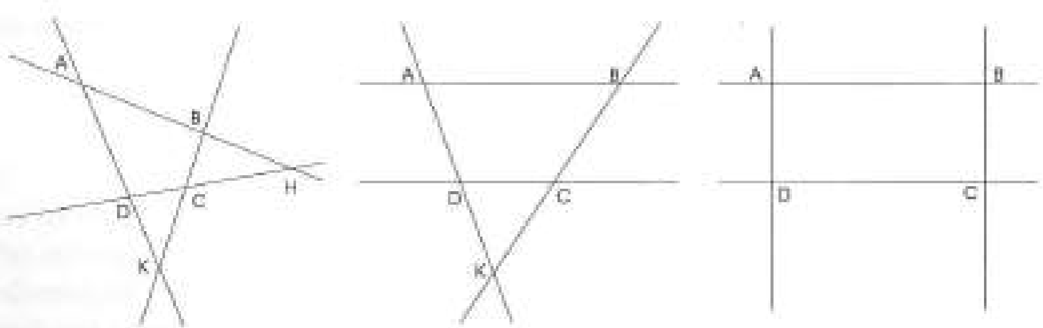
Demostremos un teorema a partir de nuestros axiomas.

Teorema 1: Dos rectas de **L** se cortan en, a lo más, un punto.

Demostración. Tomemos dos rectas cualesquiera **x** e **y** distintas de **L**. Pueden pasar dos cosas: que sean paralelas o que no sean paralelas. Si son paralelas, no se cortarán en ningún punto (según el Axioma 3) y el teorema es válido. Si no son paralelas, supongamos que se intersectan en dos puntos, **T** y **U**. Pero por dos puntos sólo puede pasar una única recta según el Axioma 2. Entonces **m** y **n** tendrían que ser iguales, pero pedimos que fueran distintas. Por tanto, no se pueden intersectar en dos puntos. Tampoco en ninguno porque pedimos que no fueran paralelas. Por tanto, se cortan en un punto. El teorema es verdadero.

El plano **E** (euclidiano) es suficiente rico para hacer verdaderos a una gran cantidad de teoremas. Sin embargo, es insuficiente para muchos otros. Veamos un ejemplo:

Un cuadrilátero es una figura formada por cuatro líneas tales que no sean paralelas de tres en tres. Podemos obtener tres configuraciones distintas de un cuadrilátero en **E**:



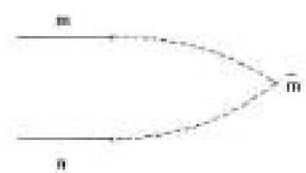
i. *Ninguna de las rectas es paralela a otra de la configuración.*

ii. *Un par de líneas de la configuración son paralelas.*

iii. *Dos pares de líneas de la configuración son paralelas entre sí.*

De aquí podemos deducir que las líneas de un cuadrilátero se cortan en cuatro, cinco o seis puntos. Cuando trabajemos con un cuadrilátero tendremos que considerar estos tres casos posibles.

¿Es posible reducir los tres casos a uno solo? La respuesta es afirmativa. Pero para ello hay que hacerle ciertas modificaciones a nuestro plano **E**.



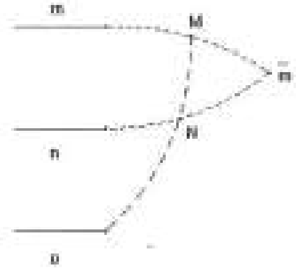
Tomemos dos rectas **m** y **n** distintas de **L**, tal que **m** sea paralela a **n**, es decir: no existe ningún punto en **P** tal que pertenezca tanto a **m** como a **n** (es decir, que se intersecten en ese punto). ¿Por qué no agregarlo?

Agreguémosle un punto **o** a nuestro conjunto de puntos **P** (tal que o no sea ninguno de los puntos en P) y digamos que **m** y **n** se intersectan en **o**. Ahora nuestro plano será:

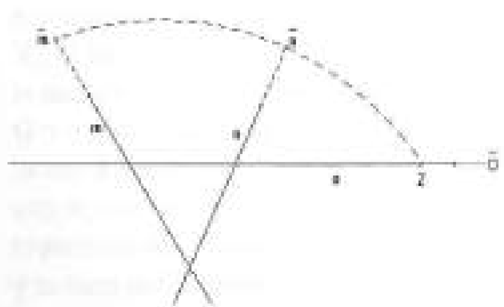
$$E_1 = \langle P \cup \{o\}, L, I \rangle.$$

Pero hemos agregado un punto extra a la estructura y si queremos que se siga cumpliendo nuestro Axioma 1, tendríamos que agregarle tantas rectas como las que forme nuestro nuevo punto **o** con cada uno de los puntos originales de **P**, ¿no? Podría ser así, pero no nos conviene. Así que pediremos que todas las rectas que pasen por **o** pertenezcan a **L** (sea éste nuestro *Supuesto 1*) y que se siga cumpliendo el Axioma 1. ¿Y que pasará con nuestro Axioma 3? Ese será imposible conservarlo en $\mathbf{E}_1$, ya que si tomáramos un punto **D** que pertenezca a **n**, debería existir una única recta que pase por **D** tal que no se intersecte en ningún punto con **m**. Ya sabíamos que esa recta en **E** era **n**, pero en $\mathbf{E}_1$ no es **n** pues se intersecta con **m** en **o**. Pero no puede ser ninguna otra, ya que no cambiamos el conjunto de rectas (Supuesto 1). Por tanto, el Axioma 3 no se cumple en $\mathbf{E}_1$. Los Axiomas 2 y 4 se siguen cumpliendo en $\mathbf{E}_1$ ya que conserva los puntos y rectas de **E**.

¿Qué pasará si tomamos otra recta de **L**, **ñ** tal que **ñ** sea paralela a **m** y a **n** (y distinta de **m** y de **n**)? Sabemos que no se intersecta con **m** ni con **n** (por el Axioma 1 de **E**). Pues hagamos que se intersecten. Sean **M** y **N** dos puntos tales que: **ñ** se intersecta con **m** en **M** y **ñ** se intersecta con **n** en **N**. Tomemos un punto **S** en **ñ** (sabemos que existe por el Axioma 4). Por el axioma 1 sabemos que por **S** y por **o** debe pasar una recta que pertenezca a **L** (Supuesto 1). Sea **So** esa recta. Sabemos que **So** no puede ser **m** ya que **S** pertenece a **ñ** y **ñ** era distinta de **m**. Si fueran iguales **S** tendría que estar en **m**. **So** y **m** se intersectan en **o**. Esas dos rectas existen tanto en $\mathbf{E_1}$ como en **E** (por el Supuesto 1). Pero en **E** tendrían que ser paralelas (ya que no son iguales y sólo pueden intersectarse en a lo menos un punto, a saber **o**, pero **o** no existe en **E**). Entonces **m** es paralela a **So** y sabíamos que **m** era paralela a **ñ**, por tanto **So** debe ser paralela a **ñ**. ¡Pero esto no puede ser! Ya que **S** pertenece a **ñ** y es un punto del conjunto **P**. Por tanto el considerar que **ñ** se intersecta con **m** en **M** y que **ñ** se intersecta con **n** en **N** nos lleva a una contradicción y por esto no podemos considerarlo verdadero en $\mathbf{E_1}$. Así que hagamos que **m**, **n**, **ñ** y cualquiera paralela a ellas se intersecten en un mismo punto: **o**.



Por cada conjunto de paralelas en el plano, agreguémosle un punto a **P** y hagamos que todas esas paralelas se intersecten en ese punto. Ya que cada conjunto de paralelas tiene en común su dirección, digamos que ese punfo representa la dirección del conjunto de paralelas.



Sea **B** el conjunto de todas las direcciones de las rectas de **L**. (Si dos rectas son paralelas tienen la misma dirección y por tanto determinan al mismo elemento de **B**). Ahora nuestro plano será $\mathbf{E_2}$=**<P U B, L, I>**. Pero queremos que el Axioma 1 siga siendo válido, entonces ¿qué recta determinan dos puntos del conjunto **B**? Supongamos que esa recta sea **b** y pertenece a **L** (*Supuesto 2*). ¡Pero entonces tenemos una recta de nuestro plano con dos direcciones distintas!

Por lo tanto, **b** no puede pertenecer a **L** (*Nota 1*).

Ahora supongamos que para cualesquiera dos puntos de **B** obtenemos una recta distinta. Sean **m**, **n** y **o** tres rectas distintas de **L** y no paralelas y sean los puntos **o**, **?** y **ô** sus direcciones correspondientes.

Bajo el Axioma 1, existe una recta que pasa por **o** y por **?**, sea **o?**, la cual no pasa por **ô** por el Supuesto 2. ¿Intersecta **o?** a la recta **o**? Supongamos que sí, sea **Z** el punto de intersección. **Z** no puede ser la dirección de **o** (porque entonces **Z**=**ô** y **o?** no pasa por **ô**). Como **Z** no pertenece a **B** entonces debe pertenecer a **P** (porque **Z** es un punto y sólo puede pertenecer a **P** o a **B**). Como **Z** pertenece a **P** entonces sólo puede pasar que **Z** sea un punto de **m** o que **Z** no sea un punto de **m**. **Z** no puede ser un punto de **m** porque **Z** es un punto de **o?** y **o?** intersecta a **m** en **o** (si lo fuera entonces **m** = **o?**, y por tanto, ¡**m** no sería línea de **L** por la Nota 1!). Entonces **Z** no es punto de **m** y por el Axioma 3 en **E**, existe **m'** en **L** paralela a **m** tal que **Z** es un punto de **m'**. Entonces **m'** tiene la misma dirección que **m** y **o** es su dirección (y, por tanto, punto de **m'**). Pero entonces **Z** y **o** pertenecen tanto a **oh** como a **m'** y, por el Axioma 1, son la misma recta. Entonces **m'** no es recta de **L** por la Nota 1 y eso contradice la forma en la que tomamos a **m'**. ¿Entonces o? no se intersecta con **o** en ningún punto? Eso parece. Pero si tomamos una recta **o'** de **L**, tal que se intersecte con **o** en **ô**, tampoco la va a intersectar **o?**. Entonces tenemos que **o?** es paralela a **o** y a **o'** y por transitividad **o** y **o'** son paralelas, ¡pero se intersectan en **ô**! Entonces **o?** no puede ser paralela a **o**. [Como estamos trabajando con rectas que no están originalmente en **L** no podemos asegurar que el paralelismo sea una propiedad transitiva. Así que tendremos que exigir que así ocurra, sea éste nuestro *Supuesto 3*]. Por lo tanto, los puntos de **B** no pueden determinar rectas distintas ni rectas paralelas a rectas de **L**, pero deben pertenecer a una recta (por el Axioma 1). Sea **b** una recta nueva tal que todos los puntos de **B** pertenezcan también a **b** [*Nota 2*] (y **b** no es paralela a ninguna recta de **L** ya que se intersecta con cualquier recta de **L** en el punto que representa la dirección de la recta). Cambiemos nuestro plano, entonces $\mathbf{E_2}$=**<P U B, L U {b}, I>** será nuestro nuevo plano.

Comprobemos que cumple los Axiomas 1, 2 y 4.

Axioma 1. Si tomamos dos puntos de **P** ya sabemos que existe una recta en **L** tal que pasa por esos dos puntos porque así ocurría en **E**. ¿Qué pasa si tomamos un punto **W** de **P** y uno **V** de **B**? Si existe **V** en **B** sabemos que, a lo menos, una recta **d** de **L** tiene la dirección **V**. Entonces pueden pasar dos cosas: que **W** pertenece a **d** o que **W** no no pertenece a **d**. Si **W** pertenece a **d** ya tenemos la recta que queremos. Si **W** no pertenece a **d** entonces en **E** existe una recta **ñ** paralela a **d** que pasa por **W**. Como el conjunto de rectas de **E** está contenido en el de $\mathbf{E_2}$ (**L** es un subconjunto de **L** U {**b**}) **ñ** es una recta de $\mathbf{E_2}$ y, por tanto, la recta que buscamos.

Axioma 2. Si existían a lo menos tres puntos no colineales en el conjunto **P** de **E** siguen existiendo en **P** U **B** de $\mathbf{E_2}$.

Axioma 4. Si todas las rectas de **L** en **E** tenían al menos dos puntos también lo tendrán en $\mathbf{E_2}$. Pero, ¿**b** tiene al menos dos puntos? El axioma 2 nos asegura que hay al menos tres puntos no colineales. El axioma 1 nos asegura que por esos puntos tomados de dos en dos pasa una recta, es decir, tenemos al menos tres rectas distintas que no tienen la misma dirección (ya que en **E** no son paralelas porque sus intersecciones son puntos de **P**). Entonces, por cada recta tendremos una dirección del plano y, por lo tanto, un punto de **B**. Y como todos los puntos de **B** pertenecen a **b** (por la Nota 2) entonces **b** tiene al menos tres elementos.

Agreguémosle otro axioma. Sea el Axioma 5 que diga: Cualesquiera dos rectas de nuestro conjunto de rectas **L** U {**b**} se intersectan en exactamente un punto. Si tomamos dos rectas **m** y **n** de **L** sabemos que no pueden ser paralelas porque no existen en $\mathbf{E_2}$. Entonces, por el Teorema 1, se deben intersectar en un punto. Si tomamos una recta **m** de **L** y la recta **b** se intersectan en un punto: en la dirección de **m** en el plano (que debe pertenecer a **B** porque así lo construimos y todo punto de **B** pertenece a **b**). El Axioma 5 es verdadero en $\mathbf{E_2}$.

Ahora sí, nuestro cuadrilátero debe constar exactamente de cuatro rectas y seis puntos en nuestro nuevo plano $\mathbf{E_2}$.

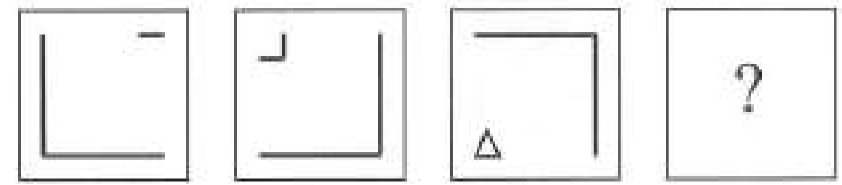
Bibliografía

[1] Beutelspacher, Albrecht y Ute Rosenbaum. *Projective Geometry: From Foundations to Applications*. 1ª ed., 1ª reimp. Ed. Cambridge University Press, Reino Unido, 1998. 1-10, 27-40 pp.

[2] Shively, Levi S. *Introducción a la Geometría Moderna*. Tr. Andrés Palacios Priego. 1ª ed., 13ª reimp. Ed. Cia. Editorial Continental, México, 1961. 18-19 pp.

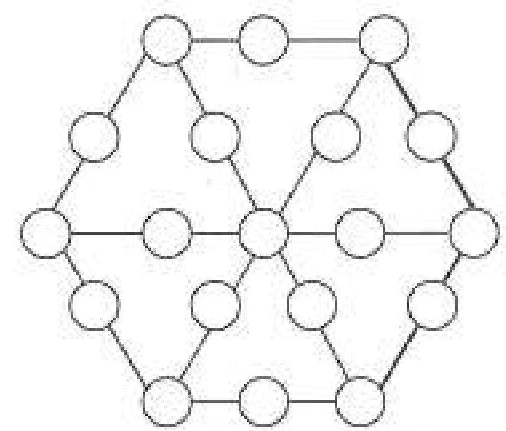
Serie Gráfica

Aquí tienes una tira de figuras que terminan en un casillero vacío. ¿Cuál es la figura que corresponde al cuarto cuadro?

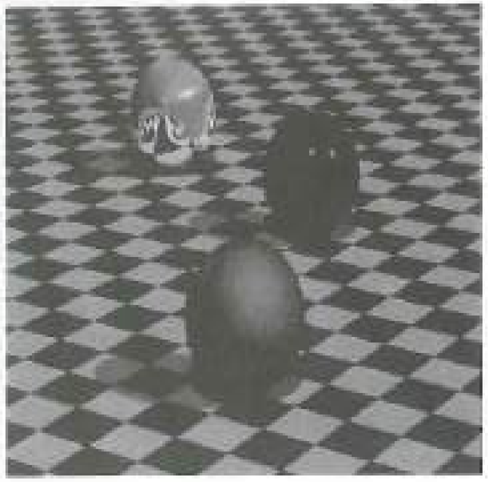


Hexágonos Numéricos

Sitúa los números del 1 al 19, uno por círculo, de manera que cada hilera de tres (es decir, las hileras del perímetro, y también las seis hileras que parten del centro) sume 22. Una vez que lo consigas reacomoda los números de otro modo para que dicha suma sea 23.



Convocatoria Otoño 2003



Laberintos e Infinitos te invita a formar parte de la revista coordinada por alumnos del ITAM, cuyo objetivo es promover el gusto por las matemáticas y ampliar la visión que se tiene de esta ciencia. Esto se logrará a través de la publicación de artículos enfocados hacia temas de interés matemático y diversas manifestaciones culturales y recreativas relacionadas con esta ciencia.

¡Participa con nosotros!

Si escribes sobre estos temas comunícate a la dirección de correo electrónico:

laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx

Cualquier duda, sugerencia o inquietud sobre el contenido de este proyecto podemos aclararla si nos escribes a la misma dirección de correo electrónico o a la página de internet:

http://laberintos.itam.mx

El cierre de edición para el siguiente número es el **3 de noviembre de 2003**.

Formato del documento:
Fuente: Times New Roman punto 12, estilo Normal.
Artículo: Archivo de texto en Word (con editor de ecuaciones, si es necesario) o archivo tipo .pdf. El artículo no deberá exceder 4 cuartillas.
Favor de incluir: Nombre completo, carrera y Universidad, o cualquier otra referencia.

Moebius

Gabriela Villanueva Noriega, mardecuervos@yahoo.com.mx
Licenciatura en Letras Inglesas, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM

Se sienta y mira a través del balcón lo que nadie más puede ver…

Lo vio por primera vez en una tarde soleada, sentado en lo alto recorriendo la palma de su mano con el dedo índice. Fue extraño voltear y encontrarlo así, con los ojos viendo a la nada y a la vez hacia adentro y el dedo constante trazando una y otra vez curvas sobre su mano. Cómo controlar su cabeza miedosa para no voltear hacia arriba, donde la ventana enmarcaba su figura envuelta, atrás la oscuridad quebrada por un solo rayo de sol prometía un patio interior en una casa habitada (porque él con su palma abierta estaba allí tomando el sol) por gente que no necesitaba salir de su cuarto para verlo. Caminaba todas las tardes por esa calle y, balcón tras balcón, hormigueaba con sus manos, tronaba los huesos de sus dedos, se recorría el cuello con la mano pero no podía evitar voltear hacia arriba y ver las ventanas una tras otra en completa oscuridad y sentirse reconfortado por un vidrio roto y un momento de certeza pensando que estaban abandonadas. Pero ese tendedero con ropa goteando, el caballo de palo y la muñeca en la esquina del balcón o hasta los focos navideños en el borde de los balcones cada año, le devolvían ese sentimiento de que detrás de cada rectángulo negro había un perfil apenas delineado por la luz y unos ojos.

En realidad todo era estúpido porque se sabe de gente que le teme a los insectos y la oscuridad, casi todos le temen a la muerte, pero ¿a las ventanas? Sólo a ella se le ocurren esas cosas. Soñar con un muchacho que le teme a las ventanas es como para reírse, y sin embargo lo vio y sintió con él el miedo y la desesperación de no controlar su cabeza. Se talló los ojos enterrando sus manos manchadas en los dos huecos arrugados de su cara. Bostezó y cerró los ojos de nuevo viendo al principio el calor rojizo de sus párpados y después al muchacho caminando por la calle, buscando eso que no puede ver; de pronto se paraba frente a un balcón y veía a la persona que estaba afuera tomando el sol…

La imaginó todas las tardes, ahí, sentada con sus medias color piel dobladas hasta la rodilla, falda de flores y el encaje del fondo asomado. Y no supo si fueron sus dientes escasos y amarillos o su quijada abierta detenida únicamente por su piel blanca, infinitamente estirada y frágil, lo que le dio la idea de inventarla a ella y desde ahí dejarla volverse algo real, algo que tuviera vida propia, que soñara y que sin que él pudiera advertirlo, lo invadiera para que toda su vida se centrara en pensarla y eso que había inventado terminara por traerlo aquí, frente a esa pared blanca. No entiende por qué.

Quienes lo trajeron no pudieron dar su nombre pero todos lo conocen como Moebius. Dijeron que llevaba varios días sin moverse frente a la ventana de su cuarto y que estaba loco. Cuando llegó al hospital lo encerraron en un cuarto con paredes blancas en las cuales (nadie sabe de dónde consiguió la crayola) dibujó un balcón con barrotes y, en el centro de los trazos negros e infantiles, el símbolo que le dio su nombre en el hospital. Se sienta cruzado de piernas todo el día viendo más allá de la pared y la luz del sol y de la luna entran por una ventila a lo alto del cuarto, pero en su piel no se distinguen una de la otra (para él las horas no existen) y es como si la hormiga en su cabeza caminara por un largo camino que al final siempre lleva a lo mismo. Nadie sabe qué es lo que ve en la pared pero todos pueden notar que sus ojos no ven el cemento rugoso que esta ahí frente a ellos, ese cemento que algunos han tenido que tocar para convencerse de que la pared esta allí y que eso que ve Moebius no existe, aunque todos sientan lo contrario y se dejen convencer por su mirada.

Yo conocí a Moebius ahí mismo, en el hospital al que nunca he ido y por el cual me muevo como el aire que entra y sale de los cuartos sin mover mis pies de esta ventana. Y he intentado comprender eso que me contó y no puedo porque no llego más que a la parte de atrás de mis ojos. Y con el sol en mis pestañas pienso en él que no puede dejar de ver a la vieja que duerme y sueña con un muchacho que le teme a las ventanas, mientras trazo una banda de Moebius sobre la palma de mi mano.

El Papívoro

Las obras completas de un autor han sido reunidas en 5 tomos de 400 páginas cada uno. Estos libros están cuidadosamente colocados por orden en la estantería superior de la biblioteca, pero su propietario nunca los lee.

Un día la esposa, **limpiando** el polvo, se da cuenta de que una termita había excavado un túnel desde la página 1 hasta la 2000. Al alertar a su esposo, éste exclama:

-¡Así que la termita ha estropeado 2000 páginas!

-¡Oh! No, no tantas.

-Entonces ¿cuántas?

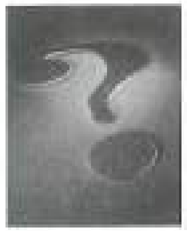
El punto X del mapa pirata

El pirata español enterró uno de sus tesoros en una isla desierta de una manera muy complicada. Lo que hizo Barbanegra fue llevar a tres de sus mejores hombres a la isla desierta, al llegar Barbanegra se paró en una palmera específica con una cuerda en sus manos, tomando un extremo, le dio a uno de sus hombre el otro extremo y lo encaminó a 6 pasos directo al sur y después 8 pasos al este.

Barbanegra le dio otra cuerda a los otros dos hombres, indicando a uno a caminar a partir de la palmera 6 pasos al este y 2 pasos al norte. Al tercer hombre le dijo que caminara a un punto que estaba 6 pasos al sur y 2 pasos al oeste de la palmera. Cuando ya estaban todos en posición estiraron las cuerdas formando dos líneas rectas. El punto X en donde se cruzaron las cuerdas fue el lugar donde Barbanegra decidió cavar para enterrar el tesoro.

Suponiendo que la palmera se encontraba en las coordenadas (3,4) ¿Cuáles son las coordenadas del punto X?

Construyendo un puente



Clara y David, dos hermanos, quieren regresar a su casa después de haberse perdido en un bosque muy lejano. Al tratar de regresar encuentran un río y no saben cómo cruzarlo. Necesitan hacer un puente que cruce el arroyo, pero no saben de qué distancia construirlo.

El río no es muy ancho por lo que pueden utilizar un tronco o una cuerda suficientemente larga amarrada a un árbol para poder cruzar.

Debido a esto, marcan un punto a la orilla del río justo enfrente de un árbol que se encuentra del otro lado. Después caminan 20 pasos sobre la orilla, Clara se queda en ese punto. David continúa caminando 20 pasos a lo largo de la orilla y hace una marca sobre ese punto, da una vuelta de 90 grados y camina justo hasta el punto en donde él, Clara y el árbol del otro lado, estén sobre una línea recta. Después de este procedimiento David afirma que ha encontrado la distancia necesaria para cruzar, por lo que juntan un tronco y le amarran una cuerda, después lo lanzan y lo atoran en el árbol que está del otro lado; con la ayuda de las cuerdas logran cruzar. ¿Cómo le hicieron?

El gato y la escalera

Una escalera está apoyada en el piso sobre una pared vertical. Exactamente en el peldaño central de la escalera duerme un gato. La escalera empieza a deslizarse hacia abajo. ¿Qué trayectoria describe el gato, suponiendo que no se despierta? ¿Cómo lo sabes?

Barras

Usted tiene sobre la mesa dos barras de hierro. Por su aspecto son exactamente iguales. Una de las barras está imantada (con un polo en cada extremo). La otra no está imantada. ¿Cómo puede distinguir cuál es la barra imantada, mediante simples desplazamientos sobre la mesa, sin levantar ninguna barra y sin ayudarse de ningún otro objeto?

Botella de Klein

Juan José Arreola

"El cilindro es al toro lo que la Banda de Moebius a la Botella de Klein." Y Francisco Medina Nicolau sacó de una gaveta la célebre cinta de papel, ahora con las puntas pegadas de un modo particular, como en un cuello de camisa. Sus manos de prestidigitador la hicieron girar y en el aire quedó la forma pura:

-Cuando la Banda de Moebius se esconde en ella misma, surge la Botella de Klein... ¿La ves?

Quedé perplejo y salí por tangente literaria:

-Es el procedimiento de Kafka, según la ley de Roberto Wilcock: sacarse de la cabeza un objeto, escamotearlo y seguir hablando sobre él...

El doctor Garfias estaba presente:

-A propósito de cabeza, no se la quiebre usted, que al fin y al cabo la botella es de vidrio. La inventaron los alquimistas. Creo que fue Jehan Brodel, denunciado a la Inquisición por sus vecinos de la calle del Pot de Fer, ¿se acuerda usted? El cuerpo infame sin principio ni fin era la imagen blasfematoria de Dios. Fue destruido el original y los dibujos previos también. Pero la cosa llegó si no a los ojos, a los oídos del Bosco, que pintaba de memoria: allí está el ámpula, la burbuja de jabón que encierra a los amantes en el Jardín de las Delicias...

Ludlow llegó en ese momento con envoltorio sospechoso y sonrisa feliz. Había alcanzado a oír las palabras de Garfias y enlazó los puntos suspensivos:

-...la botella figura también dentro de la tradición castellana; es el fracaso del Marqués de Villena citado por Quevedo y por Vélez de Guevara. Es la redoma que encerraba al Homúnculo, el feto infernal, el niño que no necesita madre para nacer...

Mis tres doctores en física, topología y lógica matemática me acorralaron en una superficie collado sin pies ni cabeza. Hicieron y deshicieron nudos imaginarios y reales con cuerdas y palabras. Yo dije, recordando a Rafael, que el collado se parece al fuste de una silla de montar y que los artesanos de Colima trazan la superficie sobre pergaminos como Dios les da a entender, sirviéndose de patrones heredados. Se rieron. Jorge Ludlow desenvolvió su paquete.

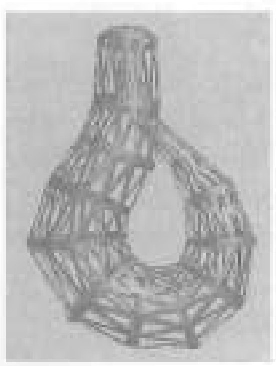
-¿Quería una Botella de Klein?

No paso a creerlo. Siguiendo indicaciones precisas, los diseñadores y obreros de la casa Pirex, especializada en materiales refractarios, me hicieron el capricho. No paso a creerlo. Después de muchas tentativas, aquí está el milagro físico sin interior ni exterior, perfectamente soplado y sin defecto.

Ahora estoy solo frente al objeto irracional, llenándolo con mis ojos antes de ponerle tinto de Borgoña. Aquí está sobre mi mesa de ¿trabajo? la Botella de Klein que busqué por más de veinte años de ¿trabajo?

Mi mente trabajada no puede más, siguiendo las curvas del palindroma de cristal. ¿Eres un cisne que se hunde el cuello en el pecho y se atraviesa para abrir el pico por la cola? Me emborracho mentalmente gota a gota con la clepsidra que llueve lentamente sus monosílabos de espacio y tiempo. Mojo la pluma en ese falso tintero y escribo sin mano una por una las definiciones inútiles: signo de interrogación estatuaria. Trompa gigante de Falopio. Corno de caza que me da el toque de atención al silencio, cuerno de la abundancia vacía, cornucopia rebosante de nada... Víscera dura que desdice la vida diciendo soy útero y falo, la boca que dice estas cosas: soy tu yo de narciso inclinado a su lirio, tu dentro y tu fuera abierto y cerrado, tu liberación y tu cárcel, no bajes los ojos ¡mírame!

Pero ya no puedo mirar porque la cabeza se me fue a las entrañas, ¿por qué los topólogos no trabajan con vísceras y desarrollan hígados, riñones y asas intestinales en vez de nudos y toros? Se lo voy a proponer si despierto mañana.



Por ahora empuño la Botella de Klein. La empuñas pero no la empinas. ¿Cómo puedo beber al revés? Tienes miedo en pie como falso suicida, jugando metafísico el peligro juguete en tus manos, revólver de vidrio y vaso de veneno... porque tienes miedo de beberte hasta el fondo, miedo de saber a qué sabe tu muerte, mientras te crece en la boca el sabor, la sal del dormido que reside en la tierra...

Juego de dados musical de Mozart

M. en I. Hernando Ortega Carillo, *hernando@signa.iimas.unam.mx*
Dr. Federico O'Reilly Togno, *federico@signa.iimas.unam.mx*
IIMAS, UNAM

A Jorge Velazco.

Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) compuso la obra *Musikalisches Würfelspiel*, singular creación artística en la que el ingenio del músico lo llevó a componer no una pieza para piano sino un generador de *valses*. Esto es, la obra no contiene una partitura para un pequeño *vals* de 16 compases sino que tiene un sistema que, apoyado en el azar, puede generar un número *mucho* muy grande de valses diferentes de 16 compases cada uno. Mozart escribió 176 compases numerados del 1 al 176 y los agrupó en 16 conjuntos de 11 compases cada uno. El procedimiento para generar un *vals* particular a partir de esta combinación de habilidad en la composición y el uso del azar consiste en que cada compás del 1 al 16 se selecciona con unos dados, del correspondiente conjunto de 11 compases.

Estos 16 conjuntos o columnas de números, que identifican cada uno de los 176 compases, son los siguientes:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

En el encabezado, en números romanos aparece el número del compás e identificando cada una de las filas aparece un número entre 2 y 12 que corresponde a la suma de las caras de dos dados que deben ser lanzados para definir en cada compás, cuál es el elemento que deberá incluirse en la partitura. La obra aparece publicada por primera vez en la Edición de J.J. Hummel, Berlín-Amsterdam, 1793.

Existen en muchos sitios referencias al *"Juego de Dados Musical de Mozart"*, en los cuales se enfatiza el número de posibles combinaciones en la elección de la partitura. Existen, también, en la red de *Internet* varios sitios en los que se simula este Juego de Dados e inclusive se escucha el *vals* particular con la calidad sonora de un sintetizador y las restricciones de audio del equipo de cómputo con el que se conecta uno a la red.

Sin entrar al detalle más fino como lo es el que algunos compases son iguales aunque tengan distinto número que los identifica, en principio, el número de posibles partituras corresponde al número1116 que se lee como el número 11 elevado a la potencia 16. Este número es tan grande que se estima que si se interpretaran continuamente y con un orden sistemático todas las partituras posibles y cada interpretación tardara 30 segundos entonces para agotar todas las posibilidades se excederían 728 millones de años, interpretando la obra de día y de noche y de manera continua.

Dicho lo anterior es importante mencionar que no todas las realizaciones para la suma de dos dados son igualmente probables. La distribución probabilística para la suma de las caras de dos dados lanzados al azar se deduce haciendo la observación de que la suma = 2 sólo cuando en ambas caras aparece el número 1, esto es: (1,1) y la suma = 3 cuando: (1, 2) o bien (2, 1), y así las demás, como la suma = 9 cuando: (3, 6) o (4, 5) o (5, 4) o (6, 3). Se observa que el número total de pares (i,j) es 36. Las referidas probabilidades de la suma son entonces:

Prob(2) = 1/36 = Prob(12)
Prob(3) = 2/36 = Prob(11)
Prob(4) = 3/36 = Prob(10)
Prob(5) = 4/36 = Prob(9)
Prob(6) = 5/36 =Prob(8)
Prob(7) = 6/36

Los 16 lanzamientos del par de dados se hacen de manera independiente y observar que las 16 sumas dieran como resultado, por ejemplo,

(2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7),

tiene una probabilidad asociada. Se calcula su probabilidad de ocurrencia multiplicando las 16 probabilidades que le corresponden a cada uno de los números ejemplificados: la del 2, la del 4, la del 11, etcétera. En este caso el resultado es:

Prob = (1 x 3 x 2 x 5 x 6 x 5 x 2 x 5 x 2 x 4 x 3 x 5 x 1 x 1 x 3 x 6).

De todas las más de 45,949 billones de posibles realizaciones (1116), muchas comparten el tener la misma probabilidad de ocurrir pero sólo una de ellas se distingue, desde el punto de vista probabilístico, en tener la probabilidad de ocurrencia más alta. Ésta corresponde a la realización en donde para cada uno de los 16 compases, los dados suman 7 en todas las ocasiones. La probabilidad de dicha realización es (1/6)16.

Si como se dijo anteriormente, cada 30 segundos se interpreta una realización del Juego de Dados pero siguiendo al pie de la letra la selección aleatoria, la realización más probable que se ha mencionado ocurriría "en promedio" cada 44,728 años. Haciendo un cálculo similar, una de las menos probables, por ejemplo (2, 2, 2, ..., 2), ocurriría "en promedio" cada 126,184 billones de años, en donde recordamos que un billón es un millón de millones (no así en otros idiomas). Por ello no pensamos que sea una exageración el que cada vez que se anuncia que se interpretará el Juego de Dados, se presume como Estreno Mundial. Se estima que el Big Bang (inicio del Universo como lo conocemos) ocurrió hace aproximadamente 13 a 15 mil millones de años y que la existencia de nuestro astro solar, que lleva media vida, durará todavía unos 5 mil millones de años. Esto es sin duda información para reflexionar. La obra El Juego de Dados, interpretada siguiendo la selección aleatoria descrita, para permanecer en nuestra cultura y agotar sus posibles realizaciones, evidentemente requerirá de la colonización de otros sistemas solares y que desde luego, no se les olvide llevarla.

Aún cuando los 176 compases fueron escritos para piano suelen hacerse arreglos para incorporar otros instrumentos. La Orquesta Sinfónica de Minería le proporcionó a este Instituto, el IIMAS de la UNAM, un arreglo de 176 compases para cuatro cuerdas con la idea de hacer un sistema computarizado. Dicho arreglo fue capturado con un programa llamado Finale y se crearon archivos en lo que es referido como un arreglo matricial de 11 x 16, en el cual en cada celda de la matriz podría identificarse el compás correspondiente para los cuatro instrumentos. Cada objeto o elemento de esa matriz queda asociado a su vez a un elemento gráfico y se desarrolló un programa que lleva a cabo una simulación aleatoria de las 16 tiradas de un par de dados y se identifica entonces la secuencia de objetos gráficos que forman la partitura decidida por el azar. Dicha combinación se imprime en forma de partitura y también por separado para cada uno de los cuatro instrumentos de cuerda.

Se ilustra la partitura de la realización más probable:

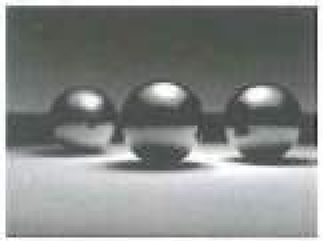
Todas las obras de Mozart han sido catalogadas por su número Köchel y esta obra en particular, *Musikalisches Würfelspiel,* es la K. 294 (Anh.C), así que ha sido propuesto que cada realización pudiera tener un número particular Köchel que la identifique. Es relativamente simple hacer una extensión con 16 "dígitos" utilizando un sistema de base 11, por ejemplo, los "dígitos" 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y A. La correspondencia entre la suma de los dados y cada uno de los 16 compases representaría a la suma igual a 2 con "0", la suma igual a 3 con "1" y finalmente la suma igual a 12 con "A". Así la partitura más probable tendría el número Köchel, K. 294.5555555555555555.

Agradecemos la colaboración para la captura de la base de datos formada por los 176 compases a Federico O'Reilly Regueiro. Asimismo, agradecemos a Víctor Hugo Godoy Aguirre de la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico por su apoyo en el modelado geométrico y animación del personaje que representa a Mozart.

La cara oculta de las esferas

Dr. Efrén Morales Amaya
Instituto de Matemáticas, UNAM
efren@matcuer.unam.mx

Después de definir la esfera S^n en el espacio euclidiano R^{n+1} como *el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto*, en primer lugar podemos observar algunas propiedades de naturaleza geométrica de S^n. Por ejemplo, S^n tiene un punto *equicordal*, es decir, un punto P con la propiedad de que todas las cuerdas de la esfera que pasan por P tienen la misma longitud, donde P será el centro. Otro ejemplo es el hecho de que S^n es un cuerpo de *ancho constante.* Llamemos a esta clase de propiedades de la esfera propiedades del tipo I. Nos podríamos preguntar si existe algún conjunto convexo distinto de la esfera que tenga las propiedades del tipo I.



Por otro lado, consideremos situaciones reales de nuestro universo físico restringidas a la geometría esférica; por ejemplo, después de observar que el campo gravitacional producido por una esfera sólida, cuya masa está uniformemente distribuida, es igual al campo gravitacional producido por una masa puntual, entonces planteamos el siguiente problema:

Dado un campo gravitacional producido por un cuerpo convexo en el espacio, cuya masa está uniformemente distribuida, que actúa sobre cada punto del complemento (como si toda la masa de dicho cuerpo estuviera concentrada en un punto), ¿es este convexo una esfera?

Llamemos a esta segunda clase de propiedades de la esfera propiedades del tipo II.

En el libro *"La cara oculta de las esferas"* del profesor Luis Montejano Peimbert se nos presenta, de manera extraordinaria, un bellísimo ejemplo de cómo es posible hacer uso de las propiedades del tipo I para estudiar y resolver problemas que involucran a las propiedades del tipo II. De lo que me ocuparé en lo que resta del artículo es en detallar lo anterior.

En primer lugar, Montejano es muy cuidadoso tanto de introducir como de conducir a sus los lectores a través de su libro. Confiado en lo maravilloso de su ciencia, de su arte, pide cautela, dedicación y audacia para que, de esta manera, la aventura intelectual que el libro ofrece sea plena y fantástica. Podemos ilustrar lo anterior mediante un ejemplo: imagine un juego mecánico padrísimo en un parque de diversiones, de pronto se aparece Montejano y le dice a usted: "joven, abroche muy bien su cinturón de seguridad; cuando este aparato se encienda usted debe abrir los brazos y las piernas. Hoy usted va a saber lo que es volar de verdad". Y en efecto, uno vuela.

En segundo lugar, la elección por parte de Montejano del problema del tipo II es inmejorable, el problema número 19 del *Libro Escocés*, problema de Ulam (ver IV El libro escocés y V Equilibrio en cualquier posición):

Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, ¿debería ser éste necesariamente una esfera?

En particular, cuando la densidad es cero:

Si un sólido descansa en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje sobre una superficie plana horizontal, ¿debería ser éste necesariamente una esfera?

Además de su belleza intrínseca tal problema tiene un enorme valor sentimental para Montejano por ser éste el motivo de sus desvelos durante sus mocedades. Sin embargo, sus sufrimientos se vieron recompensados al materializar su sueño de demostrar el Problema de Ulam en el caso de densidad cero; cuya elegante demostración sirve, además, como un magnífico ejemplo del material expuesto en la primera parte del libro (I Sombras y Tajadas y III El círculo). Se rumora que a Montejano todavía la versión general del problema de flotación le produce insomnios.

Por otro lado, la solución del problema de flotación en su versión bidimensional resulta inesperada: *cuando la densidad es un medio, existen figuras, diferentes de un círculo, que flotan en cualquier posición en la que se les deje en un líquido.* Si bien la demostración de este caso rebasa los límites del libro, el material es presentado de tal manera que se puede tener una buena idea del ingrediente geométrico fundamental de la prueba: las curvas de Zindler.

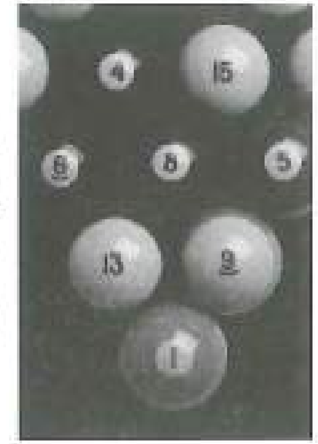
Naturalmente, no podía faltar uno de los objetos geométricos favoritos de Montejano: las figuras y los cuerpos de ancho constante (VI Figuras de ancho constante y VII Cuerpos de ancho constante). Este material clásico es presentado con un enfoque original. El resultado central de esta parte es una versión débil de un bello y profundo teorema de Montejano: *Si todas las secciones transversales de un cuerpo convexo M que pasan por un punto son de ancho constante, entonces M es una esfera.*

"La cara oculta de las esferas" es un libro con un gran futuro. En particular tiene lugar las siguiente pregunta: ¿ Será posible cambiar en todo lo que hemos dicho (después de todo Montejano no es geómetra sino topólogo) las palabras Geometría por Topología y geométrico por topológico? Naturalmente sí; es decir, el hermanito topológico de *"La cara oculta de las esferas"* podría nacer en cualquier momento. En otras palabras, existe la posibilidad de repetir la estrategia del libro de Montejano pero ahora en el contexto de la Topología. En detalle, consistiría en observar algunas propiedades de naturaleza topológica de S^n como las propiedades de tipo I' y preguntarse cuáles de ellas caracterizan, entre los conjuntos homeomorfos a S^n, a la esfera; luego considerar las propiedades del tipo II', es decir, situaciones reales restringidas a la geometría esférica; finalmente, resolver problemas con propiedades del tipo II' haciendo uso de propiedades del tipo I'.

Al lado del también sensacional libro *"¿En qué espacio vivimos?"* del profesor Javier Bracho Carpizo, el libro de Montejano ha figurado como un joven clásico de la literatura matemática mexicana. Particularmente, este libro forma parte esencial del material de cursos especiales de geometría junto con su hermano menor *"Cuerpos de ancho constante"* y la traducción de Montejano del libro de H. Hadwiger *"Lo antiguo y lo nuevo acerca de los conjuntos convexos"*. Asimismo, ha sido el punto inicial de trabajo para los estudiantes que integran o que han integrado el numeroso grupo científico encabezado por Montejano.

En una comida en la casa del célebre profesor ruso V. Boltyanskii, Montejano dedicaba un brindis a los autores del libro *"Convex Figures"*, V. Boltyanskii y I.M Yaglom, por haber sido éste, tres décadas atrás, su manantial del saber y una de sus principales pasiones. Comprendí inmediatamente, en toda su dimensión, la emoción de aquellas palabras; bastó darme cuenta de que *"La cara oculta de las esferas"* representó para mí, en el inicio de mi carrera universitaria, una "maravillosa luz de entendimiento". Vaya pues... ¡un brindis por ti, Luis!

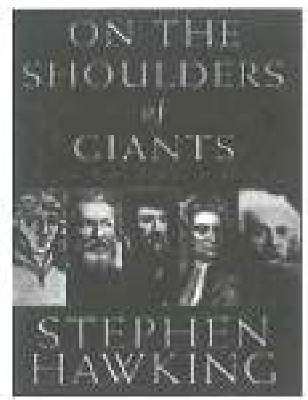
El sendero del Paseo



BILLAR MATEMÁTICA Y FANTASÍA
Libro escrito por FERRAN HOLLEDERER GASCON

Se ha demostrado que los campeones del billar utilizan las matemáticas para calcular ángulos y trayectorias exactas. En este libro puedes encontrar sistemas que te ayudarán a crear ciertos efectos sumando algebraicamente los distintos desplazamientos de las bolas 1, 2 y 3. Con explicaciones sencillas, pero precisas, podrás convertirte en un excelente jugador de billar.

http://www.billar.20m.com/internd.html



Un libro de Stephen Hawking: A Hombros de gigantes
(On the shoulders of giants, the great works of physics and astronomy).
El gran científico Stephen Hawking ha reunido en este libro las cinco obras que, a su juicio, representan el cañón de la cultura universal en el campo de la física y la astronomía. Lo que aquí está escrito es una breve introducción de cada una, explicando su importancia para la ciencia.

Los autores son:
Nicolás Copérnico (Sobre las revoluciones de los orbes celestes).
Galileo Galilei (Diálogo sobre dos nuevas ciencias).
Johannes Kepler (Las armonías del mundo).
Isaac Newton (Principios matemáticos de la filosofía natural).
Albert Einstein (El principio de la relatividad).
Las compilaciones de cinco de los mayores escritores de la historia, constituyen (según el autor) un "*tesoro de conocimientos científicos que nadie puede ignorar*".

Si lo que te gusta son la física y las matemáticas, éste es un libro que no puedes dejar de leer. Con temas como "ilusiones ópticas", "problemas y experimentos" y "acertijos numéricos", puedes poner a prueba tu habilidad para resolver problemas lógicos y matemáticos. Si, por otro lado, piensas que las matemáticas son puros números que no entiendes, este libro puede ayudarte a comprenderlas un poco mejor y descubrir que, en realidad, no son tan difíciles como creías.

"Varios años atrás concebí la idea de poner al alcance de muchos niños, jóvenes y adultos, algunos libros que a mí me permitieron ver las ciencias físicas y matemáticas desde otro ángulo, sin fórmulas ni desarrollos complejos", *Yakov Isidorovich Perelman*, autor del libro.

Algunos ejemplos de problemas que puedes encontrar:

- ¿Qué pesa más, un vaso lleno de azúcar molido o el mismo vaso lleno de azúcar en terrones?
- ¿Cuántos cuadrados, en diversas posiciones, puede usted contar en un tablero de ajedrez?
- Un ladrillo ordinario pesa 4 kg.
  ¿Cuánto pesará un ladrillito de juguete, hecho del mismo material, si todas sus dimensiones son cuatro veces menores?
- ¿Cuántas veces aproximadamente pesará más un gigante de 2 m de altura que un enano de 1 m?
- ¿Puede usted expresar el número 1000 con ocho cifras iguales? Además de las cifras pueden utilizarse los signos de las operaciones.

- Exprese usted la unidad valiéndose de los diez dígitos.
- Exprese el número 100, con cinco cifras iguales, por cuatro procedimientos diferentes.

http://www.geocities.com/problemasyexperimentos/

OLIMIPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS

Estamos muy cerca de ser la cede de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) que se llevará a cabo en Cancún, en julio del 2005.

Los organizadores del evento están pidiendo ayuda de jóvenes entusiastas que tengan alrededor de 22 años. Si estás interesado escríbenos o visita:

http://tlahui.posgrado.unam.mx/omm/

Estrellas

Traducir el poema al lenguaje algebraico y resolver la ecuación:

Para poder describir
las sensaciones que siento por ti,
he de contar
el número de estrellas
que en el cielo pueda observar.

Pero como he de describir
el significado de la inmensidad
he optado por pensar
en el tiempo de mi vida
que te he de recordar.

El inverso de tal número
tú lo puedes igualar
a un quinto de las seis cartas
que te llegué a regalar
menos el tiempo
que te voy a recordar.

Araceli Bernabé

Solución:
Como respuesta puedo decir
que toda mi vida te voy a extrañar
y que si tuviera cinco vidas
en todas te voy a añorar.

Boca del diablo, Rodrigo Suárez

Laberintos e infinitos

Número 6

Otoño
2003