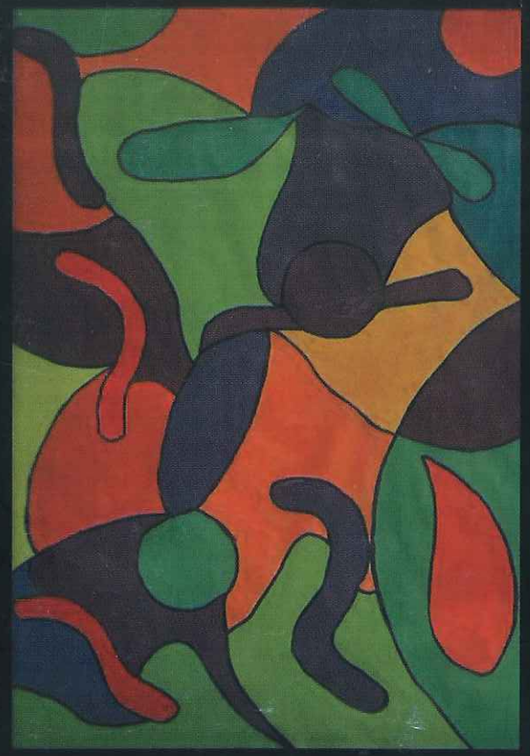


Imagen por
Susana Calderón

Laberintos e infinitos

Revista de matemáticas
de los alumnos del ITAM

Número 14
Nueva Época
Primavera
2008

www.itam.mx

ITAM

MÁS DE 60 AÑOS DE FORMAR A LOS MEJORES LÍDERES DE OPINIÓN

Nuestros egresados hacen de la palabra el instrumento para mejorar el presente y el futuro de nuestro país. Para muchos es un logro, para nosotros es el principio de lo que queremos ser.

CARLOS LORET DE MOLA

CARLOS LORET DE MOLA
PERIODISTA
LICENCIATURA EN ECONOMÍA
GENERACIÓN '94

LOS MEJORES PROFESORES PARA LOS MEJORES ESTUDIANTES

Licenciaturas e Ingenierías, www.aspirantes.itam.mx
Maestrías, www.maestrias.itam.mx
Diplomados y Cursos, www.extension.itam.mx
Doctorado en Economía, www.phdeconomia.itam.mx

ÍNDICE

EDITORIAL

Editorial 2
Agradecimientos 2

EL MATEMÁTICO DEL NÚMERO

El Marqués de las matemáticas 3

AXIOMAS, TEOREMAS Y ALGO MÁS

Georg Cantor, ese corruptor de la juventud 5
Límites geométricos 15
La cuadratura del círculo 17

ATERRIZANDO IDEAS

La verdad matemática y su evolución 22
¿Quiéres ser un "Quant"? 28

ACTIVA TUS NEURONAS

Las hermanas Jones 31
Pasar o reprobar 31
142857, un número misterioso 32
Paradoja escalonada 33
Una sucesión 34
Un poco de geometría 34

ZONA OLÍMPICA

Lista de Problemas 35

EN EL HORIZONTE

TRANSIRE SVVM PECTUS MVNDOQUE POTIRE 37
Medalla en Matemáticas Aplicadas 39

Consejo Académico
Claudia Gómez Wulschner
Mauricio López Noriega
Gustavo Preciado Rosas

Consejo Editorial

Directora
Susana Calderón Zavala

Secretario
Rafael Prieto Curiel

Diseño
Manuel Azuara Lois

Patrocinios
Erika Pérez Toral

Edición
Rebecca Farrugia Fuentes

Sitio de Internet
Diego Alonso Arenas

Colaboradores
Arely Franco Moctezuma
Carlos Ramírez Rosales

Editorial

Ya lo decía un filósofo griego, Heráclito de Efeso, "todo cambia, nada es" y es así como sucede. Laberintos e Infinitos respira y se renueva. Termina un ciclo y comienza otro. Ahora con nuevas secciones y contenido sigue buscando fomentar un acercamiento con las matemáticas. Por fin este proyecto renace y se propone continuar y crecer.

Agradecimientos

A los fieles lectores por esperar tanto tiempo por esta revista.

A las representaciones: Axioma, Crea, Echo y Factuarial por su apoyo económico.

Al profesor Guillermo Pastor, Jefe del Departamento de Matemáticas.

Al Consejo Editorial y a Ana Cecilia López Medina por su enorme apoyo.

http://laberintos.itam.mx
laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx
En la portada: dibujo de Susana Calderón

Se terminó de imprimir en Primavera de 2008, en la imprenta:
I.M. Impresores S. A. de C. V.
Andrés Molina Enríquez 825, Col. San Andrés Tepetilco, Iztapalapa, C. P. 09440.
El tiraje fue de 1800 ejemplares.
Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial de cualquier artículo o imagen sin la autorización del Consejo Editorial.
Los artículos son responsabilidad del autor y no reflejan necesariamente el punto de vista del Consejo Editorial.
Esta revista es gratuita.

El Marqués de las matemáticas

Ignacio Moreno
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

Hijo de un vendedor de sidra, Pierre Simon de Laplace nació en la región de Normandía en Francia, el 23 de marzo de 1749. Sobresaliente desde la infancia en la rama de las matemáticas, fue apoyado por sus vecinos fa estudiar en la Universidad de Caen, y a los 18 años ya era maestro de matemáticas de la escuela militar de Beaumont. En su ambición por entrar a la comunidad científica parisina, inició una relación epistolar con D'Alembert, quien era uno de los principales miembros de la Academia Francesa. Con la ayuda de D'Alambert, obtuvo más tarde el nombramiento de profesor de matemáticas en la escuela Militar de París, y quedó asegurado su ingreso en el mundo de la ciencia.

El primer trabajo científico de Laplace fue su aplicación de las matemáticas a la mecánica celeste. A Newton y otros astrónomos les fue imposible explicar las desviaciones de los planetas de sus órbitas, predichas matemáticamente. Así por ejemplo, se determinó que Júpiter y Saturno se adelantaban a veces, y otras se retrasaban con respecto a las posiciones que debían ocupar en sus órbitas. Newton llegó a concluir que era necesaria la intervención divina de forma periódica para mantener el equilibrio del Sistema Solar. Laplace logró probar en 1773 que los movimientos de los planetas con estables y que el fenómeno observado en las órbitas tiene una periodicidad de 929 años.

En el año de 1789, Laplace contrajo matrimonio con Marie-Charlotte de Courty de Romanges, y con el inicio de la revolución francesa, Laplace fue nombrado miembro de la Comisión de Pesos y Medidas, que logró establecer el sistema métrico decimal. La situación política transformó el desarrollo científico; en los años del Terror, muchos científicos como Laplace, Laurent, Coulomb o Lavoisier fueron considerados "poco dignos de confianza" por sus preferencias políticas. Lavoisier, quien creó y uniformó la nomenclatura de la química, fue guillotinado por "tiranía y traición" en mayo de 1794. Laplace se exilió en Melun, un pueblo cercano a París, hasta el año de 1799, cuando reabrió la academia de las ciencias y recobró su antigua cátedra. Junto con Lagrange fundó la Oficina de Longitudes y el Observatorio de París.

Con el fin de la revolución y del Reinado del Terror, subió al poder un caudillo al que le había dado clases en la escuela militar: Napoleón Bonaparte. Pierre fué nombrado ministro del Interior, encargado de la agricultura, minería, comercio y educación franceses, tareas difíciles para un astrónomo y matemático de corazón. Después de una mediocre labor como ministro de interior, Bonaparte se dió cuenta de su error, y buscando mantener su lealtad, lo nombra senador, y en 1803 vicepresidente y canciller del senado. Laplace publicó una de sus obras maestras, *Tratado de Mecánica Celeste*, dedicándoselo a Napoleón "Con manifiesta devoción al pacificador de Europa". Son años en los que el científico formó parte de la alta sociedad francesa; Napoleón le confirió el título de Conde y su esposa fue elegida dama de honor de Elisa Bonaparte.

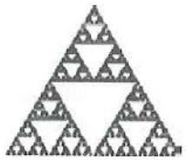
En 1814 publicó su célebre "Teoría Analítica de las Probabilidades", libro que de nuevo, dedicó a Napoleón. En 1815 fue restaurada la monarquía en Francia, y Laplace, teniendo poder como senador, votó en contra de Bonaparte, seguramente motivado y obligado por presiones políticas y aceptando la derrota de su gran amigo Napoleón. En recompensa, Luis XVIII le concedió la Gran Cruz de la Legión de Honor, y más tarde lo nombró Marqués de Laplace y presidente de la Academia.

Laplace dedicó sus últimos años de vida a orientar a jóvenes científicos en matemáticas y astronomía, y murió el 5 de marzo de 1827, casualmente, en el aniversario del centenario de la muerte de Newton, después de un breve periodo de enfermedad. Sus contribuciones matemáticas son fundamentales, en las áreas de probabilidad, ecuaciones diferenciales, e inclusive hay una ecuación de Laplace, un operador Laplaciano, y una transformada de Laplace.

En la actualidad el estado francés ha bautizado con su nombre una de las instituciones científicas más importantes del país: el Instituto Pierre Simon de Laplace.

Sus últimas palabras fueron:

"*Lo que conocemos es muy poco y lo que ignoramos es inmenso*"



El Rincón del Profesor

Georg Cantor, ese corruptor de la juventud.

Guillermo Grabinsky Steider.
Profesor del ITAM

"Del paraíso que Cantor creó para nosotros, ya nunca nadie nos echará jamás".
D. Hilbert (1926).

Introducción

A diferencia de otras áreas del conocimiento matemático que son el resultado de un largo proceso de investigación y de la contribución de un grupo numeroso de personas, la Teoría de Conjuntos y la Aritmética Transfinita es la creación genial de una sola persona y constituye sin duda un caso único por la gran diversidad de opiniones y polémicas que suscitó en su tiempo. Un matemático tan notable como H. Poincaré (1854-1912) llamó a la Teoría de Números Transfinitos una "enfermedad" de las que las Matemáticas se curarían algún día. L. Kronecker (1823-1891) un matemático alemán con gran influencia, llegó al punto de oponerse a la publicación de tales ideas y recurrió al insulto personal, llamándolo renegado, charlatán y corruptor de la juventud. H. A. Schwarz (1843-1921) compañero universitario y amigo, rompió la amistad disgustado por la dirección que tomaban las investigaciones de su colega.

Por otro lado, R. Dedekind (1831-1916) otro gran matemático alemán, entabló una productiva relación amistosa y epistolar de la que ambos se beneficiaron, mientras que D. Hilbert (1862-1943) describió a la teoría como el "producto más sublime del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad intelectual humana". El receptor de tales agravios y elogios se llamó Georg Cantor.

Georg Cantor (1845-1918) [1],[15]

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nace el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, hijo de Georg Waldemar Cantor, luterano devoto y de María Anna Böhm, católica proveniente de una familia de músicos notables. La salud del padre era precaria y en 1856 la familia se muda al sur de Alemania en busca de un clima más caluroso. Después de vivir en diversos lugares de Alemania, Cantor concluye su educación superior en la Universidad de Berlín en donde se doctora con una tesis sobre Teoría de los Números bajo la dirección de E. Kummer (1810-1893) en 1867.

Georg Cantor

En 1869 es aceptado como *privatdozent* en la Universidad de Halle en Alemania y es entonces que su interés se dirige hacia el Análisis. Es en Halle en donde su colega H. E. Heine (1821-1881) lo invita a estudiar el difícil problema de la unicidad de series trigonométricas del que Heine había resuelto un caso particular, relajando la hipótesis de convergencia uniforme. Cantor va por todo y considera el caso en que la convergencia es puntual fuera de ciertos conjuntos excepcionales los cuales intenta clasificar. Brevemente describiremos el problema y la solución de Cantor

El problema de unicidad (1870-1872)[3],[6]

Supongamos que $a_0 + a_1\cos(x) + b_1\,\mathrm{sen}(x) + a_2\cos(2x) + b_2\,\mathrm{sen}(2x) + \ldots (*)$ es una serie trigonométrica que converge a cero a excepción de un conjunto de puntos P, entonces ¿Cómo debe de ser P para que se pueda concluir que todos los coeficientes a_n, b_n son iguales a cero? A un conjunto P de esos le llama CONJUNTO DE UNICIDAD. De inmediato Cantor notó que era necesario construir una sólida teoría de los números reales y aquí empieza su gran aventura.
Cantor llama a un punto x, un punto de ACUMULACIÓN de un conjunto P, si todo intervalo abierto que contiene a x, contiene también una infinidad de puntos de P, así por ejemplo: $x = 0$ es punto de acumulación de $P = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. A la colección de puntos de acumulación de P la denota por $P^{(1)}$ y lo llama el conjunto DERIVADO de P. El segundo derivado de P, denotado $P^{(2)}$, es el resultado de derivar a $P^{(1)}$ una vez. De aquí en adelante el conjunto $P^{(n)}$ es el primer derivado de $P^{(n-1)}$. Si $P^{(n)}$ es vacío para alguna n, P se llama de PRIMERA ESPECIE (de lo contrario se llama de segunda especie). En estos términos el teorema de unicidad de Cantor dice así: "Si $(*)$ converge puntualmente a cero a excepción de los puntos de un conjunto de primera especie, entonces todos los coeficientes son cero".

Todos los conjuntos de primera especie son numerables, no así el recíproco (por ejemplo si $P = \mathbb{Q}$, entonces $P^{(n)} = \Re\ \forall n$ por lo que es de segunda). Por otro lado todo subconjunto no-numerable es de segunda especie. El más célebre de ellos es el conjunto ternario clásico de Cantor C, inventado por él en 1883 con el exclusivo propósito de exhibir un conjunto denso en ninguna parte y de segunda especie(Ver: "¿En verdad existe algo así?,Laberintos e Infinitos numero 5). Habiendo definido la sucesión $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}, \ldots$ Cantor observa que $P^{(n)} \subseteq \ldots \subseteq P^{(2)} \subseteq P^{(1)}$ y define $P^{(\infty)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$ es en este punto donde Cantor da el paso decisivo y define $P^{(\infty+1)}$ como el primer derivado de $P^{(\infty)}$ y la puerta hacia la aritmética transfinita estaba abierta. Ya encarrerado, se apresta a definir la clase II de números transfinitos(Cantor remplaza ∞ con ω):
$\omega, \omega+1, \ldots, \omega+n, \ldots, \omega+\omega, \ldots, \omega^m, \ldots, n_1\omega^{m_1} + \ldots + n_r\omega^{m_r}, \ldots, \omega^\omega, \ldots$

LIOUVILLE REDESCUBIERTO (1874) [7],[8]

Un número real se llama ALGEBRÁICO si es la raíz de una ecuación de la forma: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ $(**)$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números enteros. Un número real que no es algebráico se llama TRASCENDENTE.
J.Liouville(1809 - 1882) probó (en 1844) que todo intervalo (α, β) contiene una infinidad de números trascendentes. Un ejemplo de estos números es el famoso número de Liouville (1851) $x = 0.110001000000000000000010\ldots$ (el n-ésimo uno aparece en el lugar $n!$).

Cantor procede así: dada una ecuación $(**)$ define su ALTURA como el número natural $|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|+n-1$. Por ejemplo hay sólo una ecuación de altura 1, a saber,$x = 0$, cuatro ecuaciones de altura 2, $2x = 0$, $x+1 = 0$, $x-1 = 0$ y $x^2 = 0$. Para cada m hay un número finito de ecuaciones de altura m y cada una de ellas contribuye con un número finito de raíces reales por lo que ordenando convenientemente todas las raíces reales que resultan, éstas pueden escribirse como una sucesión, lo que hoy diríamos así: el conjunto de números algebráicos es numerable. Entonces la "gran mayoría"de números son en consecuencia ¡trascendentes!

En 1873, C. Hermite (1822 - 1901) prueba que e es trascendente y F. Von Lindeman (1852 - 1939), basado en el trabajo de Hermite, prueba en 1882 que π es trascendente también, mostrando con ello la imposibilidad de "cuadrar el círculo" y poniendo fin al famoso problema griego. Kronecker felicitó calurosamente a Lindeman por tan hermoso resultado, pero enseguida le dijo que trabajó en balde ya que no tiene sentido estudiar tales problemas porque los números irracionales ¡no existen!

$[\alpha, \beta]$ NO ES NUMERABLE [7]

El primer resultado dice así:

TEOREMA (Cantor 1874)

Dada cualquier sucesión de números reales $x_1, x_2, \ldots$ y cualquier intervalo $[\alpha, \beta]$ es posible determinar un número η en $[\alpha, \beta]$ que no pertenece a la sucesión.
Resulta interesante revisar el argumento original. Localizamos los primeros dos elementos de la sucesión que pertenecen al intervalo y llamamos α_1 al menor y β_1 al mayor. A continuación consideramos los siguientes dos elementos de la sucesión que pertenecen a $[\alpha_1, \beta_1]$ y llamamos α_2 al menor y β_2 al mayor. Continuando de esta manera generamos una cadena descendente de intervalos cerrados: $[\alpha_n, \beta_n] \subseteq \ldots [\alpha_2, \beta_2] \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, por lo que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$, $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n$ y $\alpha_n \leq \beta_m$ para cada n, m. Se nos presentan dos casos:

CASO 1

El procedimiento genera sólo un número finito de intervalos distintos, es decir, para alguna N, $\alpha_N = \alpha_{N+1} = \ldots$ y $\beta_N = \beta_{N+1} = \ldots$ así pues el último intervalo generado es $[\alpha_n, \beta_n]$ y cualquier η en (α_n, β_n) funciona.

CASO 2

El procedimiento continúa indefinidamente. Sea $\alpha^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, y $\beta^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \beta_n$ es fácil probar que $\alpha^{(\infty)} \leq \beta^{(\infty)}$. Si $\alpha^{(\infty)} = \beta^{(\infty)}$ sea η el valor común, entonces $\eta \neq x_n$ para cada n ya que x_n no es elemento de $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$.
Si $\alpha^{(\infty)} < \beta^{(\infty)}$ entonces tomamos cualquier η en $\left(\alpha^{(\infty)}, \beta^{(\infty)}\right)$.

EQUIVALENCIA Y DIMENSIÓN.

El concepto de correspondencia biunívoca entre conjuntos, aparece de manera latente en 1874, se consolida en 1877 y se publica en 1878. Dos conjuntos A y B se llaman EQUIVALENTES si existe una biyección entre ellos, en cuyo caso se dice que tienen la misma POTENCIA. Si el conjunto es finito la noción de potencia corresponde al número de elementos del conjunto. Un conjunto finito no puede ser equivalente a una parte de él, no ocurre así con los conjuntos infinitos, ya Galileo (1564-1642) había notado la correspondencia entre $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\{1^1, 2^2, 3^3, \ldots\}$.

En una carta de Cantor a Dedekind fechada el 5 de enero de 1874 le escribe: "¿Puede una superficie con su frontera incluida, digamos un cuadrado, ser referido a una recta, digamos un segmento de recta incluyendo sus extremos, de tal modo que a cada punto de la superficie le corresponda un punto sobre la recta y viceversa?. Responder tal pregunta podría ser un trabajo difícil a pesar de que la respuesta parece ser claramente NO y una prueba sería innecesaria".

Dedekind

En 1877, Cantor logra establecer una correspondencia discontinua entre los puntos de un espacio p - dimensional y los del intervalo $[0, 1]$, sorprendido por sus propios hallazgos le escribe a Dedekind (29 de junio 1877) "lo veo, pero no lo creo". Este resultado tiene implicaciones profundas para la geometría y para la noción de dimensión. A pesar de la oposición de Kronecker, el trabajo se publicó en el Journal Crelle en 1878, a partir de entonces Cantor no daría otro artículo más para su publicación en el Crelle. Años más tarde, en 1890, G. Peano (1852-1932) le propinó otro duro golpe a la intuición cuando construyó una función CONTINUA y SUPRAYECTIVA de $[0, 1]$ en $[0, 1] \times [0, 1]$; un ejemplo de las llamadas curvas que rellenan espacios. La comunidad matemática alarmada, se vio forzada a revisar la noción de dimensión y no fue sino hasta 1911, que L.E.J. Brouwer (1881-1966) aclaró el punto.

EL MÉTODO DIAGONAL.

El argumento más popular para probar la no-numerabilidad del intervalo $(0, 1)$ descansa en el llamado "método diagonal" de Cantor. Si $(0, 1)$ fuera numerable podría escribirse como sigue: $(0, 1) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Ahora consideremos la expansión decimal de cada uno de los x_i y presentemos todos los dígitos en el siguiente arreglo infinito:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots \\
&\vdots \\
x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A continuación generamos un número real $y = 0.b_1b_2\ldots$en $(0, 1)$ diferente de cada x_n, digamos del siguiente modo (entre otros): Sea $b_n = 1$, si $a_{nn} \neq 1$ y $b_n = 2$ siempre que $a_{nn} = 1$, entonces y es un elemento de $(0, 1)$ pero no es elemento de $\{x_1, x_2, \ldots\}$. La prueba es simple y elegante, pero no fue así como Cantor demostró la no-numerabilidad de $(0, 1)$, de hecho jamás produjo para este fin una demostración basada en la expansión decimal de números reales [4]. El método diagonal introducido por Cantor apareció en 1891 en un contexto diferente y por esto se le adjudica.

En 1883, Cantor escribe una obra fundamental, su GRUNDLAGEN y para entonces los números ordinales transfinitos habían ya adquirido su carácter definitivo de números.

En mayo de 1884 sufre el primero de varios colapsos nerviosos que habrían de aquejarlo el resto de su vida, los cuales serían, lamentablemente, cada vez más frecuentes y desgastantes, condición que quizá hoy en día, se habría diagnosticado como enfermedad maniaco-depresiva. A pesar de ello, Cantor continuó su trabajo innovador.

CANTOR Y LA LIBERTAD

A medida que Cantor desarrollaba su cada vez más polémica teoría de conjuntos y la oposición a su trabajo crecía a su alrededor una idea iba tomando forma y se convertiría en uno de sus pronunciamientos más célebres. En su opus magna, el Grundlagen de 1883, afirma que "La esencia de las matemáticas radica primordialmente en la libertad de creación sólo limitada

por el requisito de que las teorías derivadas de ella sean consistentes, estén a salvo de contradicciones y se apoyen en conceptos previamente admitidos pero sobre todo libre de influencias metafísicas" (Léase L. Kronecker y el "establishment" matemático). Tal pronunciamiento no era sólo un buen consejo para sus colegas sino una petición de objetividad y apertura hacia nuevas ideas. Este sentido de libertad lo lleva a participar en la fundación de una unión independiente de matemáticos alemanes, la "Deustche Mathematiker Vereinigung"(DMV) a principios de 1890, de la cual sería su primer presidente y luego miembro muy activo. Una de sus finalidades era la de proporcionar un foro abierto donde pudieran discutirse resultados sin el peligro de censura por parte de otros miembros. La primera reunión de la DMV se dio en Halle en 1891.

EL ALEPH

Cantor adoptó la letra ω para identificar al primer o lo que es lo mismo, el menor de los números ordinales transfinitos y aún en 1883 no había adoptado una notación para distinguirlo de los números cardinales transfinitos, al principio usó la misma letra, después una omega mayúscula, aunque pronto se convenció de lo impráctico de tal elección, la cambió por la O gótica lo que tampoco lo satisfizo. Cantor quería una notación diferente que representará un nuevo comienzo, lo que a la postre lo decidió por abandonar las letras griegas y latinas cuyo uso estaba ya muy generalizado y entonces apareció el aleph $\aleph$.

El aleph es la primera letra del alfabeto hebreo y resultó una elección muy afortunada, hecho que Cantor admitía complacido, nunca se había usado en matemáticas, estaba disponible en las imprentas alemanas, además podía tomarse como el inicio de una nueva matemática. Primero llamó $\aleph_1$. el primer cardinal transfinito en 1893, pronto se arrepiente y finalmente en 1895 se decide por $\aleph_0$. [2].

UN ORDEN PARA LOS TRANSFINITOS Y UN TEOREMA MUY ÚTIL [1]

Supongamos que M y N son conjuntos de cardinalidad m y n respectivamente y que satisfacen las siguientes premisas:

a) Ninguna "parte de M"(Léase subconjunto de M) es equivalente a N.

b) Existe una "parte"(subconjunto) N_1 de N que es equivalente a M.

Por la propiedad de transitividad de la equivalencia, a) y b) permanecen sin cambio si M y N se reemplazan por conjuntos equivalentes. Cantor observa que a) y b) impiden que M y N sean equivalentes entre sí, pues si $N \sim M$, entonces como $M \sim N_1$ de donde $N \sim N_1$ y como $M \sim N$ entonces habría una parte M_1 de M equivalente con M y por ende equivalente

con N lo cual contradice a). A la situación descrita por a) y b) Cantor la define en términos de cardinales poniendo $m < n$ y la observación indica que $m \neq n$. Asimismo Cantor hace notar que si $m < n$ entonces $n < m$ es imposible ya que si se invierten los roles de M y N se tendrían nuevas premisas a') y b') que contradicen a) y b).
El orden introducido satisface, pues, la tricotomía, es decir: $m < n$ o $m = n$ o $n < m$ y cualquiera de ellas excluye las otras dos.

La notación $m \leq n$ se adopta cuando sólo ocurre b) y no contradice la desigualdad $n \leq m$. Si m y n son cardinales finitos entonces $m \leq n$ y $n \leq m$ nos conducen a la igualdad $m = n$ (ver [9] pp 334-335). El resultado correspondiente para cardinales infinitos es cierto también: Si M es equivalente a una parte de N y N es equivalente a una parte de M, entonces M y N son equivalentes. Este importante resultado fue probado por el propio Cantor y por F. Bernstein (1878-1956) e independientemente por E. Schröder (1841-1902). Las demostraciones contenidas en [9] p.340 o [10] pp.86-88 en términos "genealógicos" de ancestros y descendientes son muy recomendables. El teorema es conocido como el teorema de Cantor-Bernstein, Schröder-Bernstein o como el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein también. El teorema es muy útil pues permite probar la equivalencia de dos conjuntos exhibiendo una función inyectiva de uno en otro y viceversa en lugar de proporcionar una correspondencia biyectiva entre ellos, la cual es en general, muy difícil de dar. El teorema en cuestión da lugar a los siguientes dos corolarios:

1. Sí $M_2 \subseteq M_1 \subseteq M$ y $M \sim M_2$, entonces: $M_2 \sim M_1 \sim M$.

2. Si M y N no son equivalentes y una parte de N es equivalente con M, entonces ninguna parte de M es equivalente con N.

EL CONJUNTO DE TODOS LOS SUBCONJUNTOS O COMO SUBIR POR LA ESCALERA DE JACOB.

Dado un conjunto N denotamos por $\wp(N)$, el llamado conjunto "potencia" de N, a aquel conjunto formado por todos los subconjuntos de N, es decir: $\wp(N) = \{H : H \subseteq N\}$ en notación moderna. ¿Puede ser N equivalente con $\wp(N)$? Si N es finito, digamos con n elementos, entonces $\wp(N)$ posee 2^n elementos (Demostración: $\binom{n}{j}$ con $j = 0, \ldots, n$ cuenta el número de subconjuntos de N con j elementos, sumándolos todos obtenemos: $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$ elementos en total, por el binomio de Newton). Como $n < 2^n$ no hay equivalencia posible, sin embargo si N es infinito, quizá N y $\wp(N)$ podrían ser equivalentes, este **no** es el caso. Es una de las pruebas más elegantes y contundentes Cantor muestra que para cualquier conjunto no vacío N, $N \not\sim \wp(N)$ ya que ninguna función $f : N \to \wp(N)$ es suprayectiva y menos aún biyectiva. (Demostración: sea $f : N \to \wp(N)$ una función y sea $H = \{z \in N : z \notin f(z)\}$, entonces H es un subconjunto de N el cual no pertenece a la imagen de f, ya que sí así fuera existiría $x \in N$ tal que $f(x) = H$.¿Dónde esta x? Si $x \in H$, entonces $x \notin f(x) = H$, lo cual es imposible y si $x \in N/H$, entonces$x \in f(x) = H$ imposible también. Así pues, H queda fuera del alcance de f, por lo que f no es suprayectiva).

En [1] pp. 94-95, Cantor define la importante noción del conjunto de coberturas (Belegunsmenge) o funciones de un conjunto N en otro M y que denota $(N|M) = \{f : N \to M\}$. En notación moderna $(N|M)$ se reemplaza por M^N. El origen del cambio se justifica por el siguiente resultado bien conocido: Si M y N son conjuntos finitos no vacíos con m y n elementos (respectivamente), entonces M^N contiene m^n elementos. Cantor aprovecha el resultado y define la exponenciación de cardinales.
Un caso de especial interés es cuando $M = \{0,1\}$, entonces $\{0,1\}^N$ se acostumbra denotarlo por 2^N y la virtud de este caso es que 2^N es equivalente con $\wp(N)$. (Demostración: Dada $f \in 2^N$, sea $H = \{x \in N : f(x) = 1\}$ y si $H \in \wp(N)$, sea $f = 1_H$ la función indicadora de H, la asociación $f \leftrightarrow H$ resulta ser una biyección). Por lo probado antes, N y $\wp(N)$ y en consecuencia N y 2^N no son equivalentes, de hecho, como N es evidentemente equivalente con la parte $\{\{x\} : x \in N\}$ de $\wp(N)$ se sigue que la cardinalidad de N es menor que la de 2^N, así pues hemos subido a otro escalón.
En [1] Cantor prueba que $2^{\aleph_0} = c$ donde c es la cardinalidad del continuo, esto es, la cardinalidad del conjunto de números reales.

UNA NUEZ IMPOSIBLE DE ABRIR.

Una vez definido el primer cardinal transfinito $\aleph_0$, Cantor procede a definir el siguiente número cardinal al que llama $\aleph_1$. Por el párrafo anterior $2^{\aleph_0}$ es un número cardinal no menor que $\aleph_0$ por lo que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$; ¿Será cierta la igualdad o $\aleph_1$ está propiamente entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$? La igualdad $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, se conoce como la Hipótesis del Continuo. En un principio Cantor pensó que el problema se resolvería fácilmente, pero a pesar de numerosos esfuerzos seguidos de sus correspondientes decepciones este problema fundamental se le escapó de las manos. Si se define $\aleph_2$ como el siguiente número cardinal después de $\aleph_1$ entonces nuevamente $\aleph_2 \leq 2^{\aleph_1}$ y la pregunta anterior se repite ¿$\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$? Así en adelante se define la sucesión de cardinales transfinita $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$ y ahora la pregunta es: ¿$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$? Esta es la Hipótesis Generalizada del Continuo. Muy recomendable es el artículo de K. Gödel (1906-1978) [11].

APARECEN LAS PARADOJAS Y LA TEORÍA SOBREVIVE.

Los años 1895,1899,1903 y 1908 resultan ser muy importantes para la Teoría de Conjuntos. En 1897 Cesare Burali-Forti (1861-1931) publica la primera de las paradojas las cuales se circunscriben alrededor de la idea del "conjunto de todos los conjuntos". Inicialmente el impacto no fue tan grande ya que la definición que usó para conjuntos bien ordenados era incorrecta, corregido el error la paradoja subsistía.
En 1899 Cantor descubre su propia paradoja que surge de la idea antes mencionada pero la pregunta aquí es ¿Cuál es el número cardinal del conjunto T constituido por todos los conjuntos? De existir dicho número cardinal éste debería ser el mayor cardinal posible, pero no había probado ya que el cardinal del conjunto 2^T es mayor que del de T?

B. Russell

Para rematar B. Russell (1872-1970) e independientemente E. Zermelo (1871-1953) descubren la siguiente paradoja, tan simple y tan devastadora (1903): Si se define $A = \{X : X \notin X\}$, entonces ¿Es A un elemento de A? En lenguaje popular, en un pueblo de esos de los cuentos hay un peluquero que le corta el pelo sólo a aquellos que no se lo cortan a sí mismos, entonces ¿quién le corta el pelo al peluquero?

Suponer que A pertenece a A o que no pertenece a A, da lugar a sendas contradicciones. Al parecer la libertad había llegado demasiado lejos, el fantasma de Kronecker revoloteaba y algo estaba profundamente mal. El daño causado por las paradojas tuvo sin embargo efectos benéficos. Russell junto con A. N. Whitehead (1861-1947) intentan repararlo poniendo de pie a la matemática sobre la sólida base de la lógica en su libro "Principia Mathematica". Esta obra ha sido muy importante. También otra salida de este callejón fue dada a través de los esfuerzos de E. Zermelo quien en 1908 formula un marco seguro de axiomas que fue posteriormente modificado por A. Fraenkel (1891-1965), el cual es aceptado como un marco "correcto" conocido como Z-F. También se pensó que el uso del llamado "axioma de elección", conocido como el auswahlpostulat(ver[13]), el cual Cantor consideraba que no requería mayor atención y que usaba libremente podría causar problemas, pero ¿es tal axioma el responsable de la aparición de las paradojas? En un famoso artículo [12] de 1938, K. Gödel prueba que el axioma de elección es consistente con los otros axiomas de la teoría de conjuntos, es decir, no puede contradecírsele a partir de los otros axiomas de Z-F y en otro artículo [13] aún más célebre de 1963 P. J. Cohen (1934) prueba que el axioma de elección no se deduce de los otros axiomas de la Teoría de Conjuntos, es decir, es independiente de ellos. Así pues, el axioma de elección y sus múltiples e importantes equivalentes ([13] pp. 99-109) no son los responsables. Mientras tanto la Teoría de Conjuntos se había extendido a otras áreas y su lenguaje se había convertido en una herramienta no sólo útil, sino indispensable. A partir de 1902 H.Lebesgue (1875-1945) construye su más hermosa creación, la Teoría de la Medida y la Teoría de la Integral en las que las operaciones infinitas con los conjuntos y con las funciones son su divisa. Lejos de tirar a la basura el trabajo de Cantor por culpa de las paradojas, el camino era conservar sus principales elementos pero cerrándoles el paso a las inconsistencias. Dejamos la defensa del trabajo de Cantor al mismo Cantor [2]:

> "Mi teoría se levanta tan firme como una roca; cada flecha dirigida en su contra regresará rápidamente a su arquero. ¿Cómo sé esto? Porque la he estudiado desde todos los lados por muchos años; porque he examinado todas las objeciones que se han hecho en contra de los números infinitos y sobre todo porque he seguido sus orígenes, por así decirlo, a la primera causa infalible de todas las cosas creadas".

Bibliografía

1. "Men of Mathematics" Eric Temple Bell. Capítulo "Paradise lost". New York. Touchtone (1986).
2. "Contribution to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers" G. Cantor, Dover Publications. New York (1955).
3. "The Trigonometric Background to Georg Cantor Theory of Sets" Joseph W. Dauben, Arch.Hist.Ex.Sc (1970 - 1) pp. 181 - 216
4. "Denumerability and Dimension: The Origin of Georg Cantor's Theory of Sets" Joseph W. Dauben, Rete 2z (1974) pp. 105 - 134
5. "Georg Cantor and the Battle for Transfinite Set Theory" Joseph W. Dauben, Journal of the ACMS.9th ACMS Conference procedings (1993)
6. "Connection in Mathematical Analysis: The Case of Fourier Series" Enrique A. Gonzales-Velasco, American Mathematical Monthly Vol. 99 ♯5 May 1992 pp. 427 - 441
7. "Georg Cantor and Trascendental Numbers" Robert Gray, American Mathematical Monthly Vol. 101 ♯9, Nov. 1994 pp. 819 - 832
8. "Theory of Sets" E. Kamke Dover publications. New York (1950).
9. "A Survey of Modern Algebra" G. Birkhoff and S. MacLane, 3ra edición. Macmillan (1965).
10. "Naive Set Theory" Paul R. Halmos; D. Van Nostrand Company, 5ta reimpresión (1965).
11. "What is Cantor's continuum problem?" K. Gödel; American Mathematical Monthly, Vol 54, ♯9 (1947).
12. "The Consistency of the Continuum Hypothesis" K. Gödel. Ann. Math. Studies ♯3 (1940).
13. "The Independence of the Continuum Hypothesis" P. Cohen, Proc. Mat. Acad. Sci (I), 50, pp. 1143-11148 (1963).
14. "Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias" J. A. Amor Montaño. 1era edición. Servicio Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM (1997).
15. http://www-groups.decs.st.ac.ur/ history/BiogIndex.html en donde se puede consultar la biografía de cada uno de los matemáticos considerados.

Límites Geométricos

Rafael Prieto Curiel
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

Seguramente, gracias a nuestras primeras clases de matemáticas, recordamos la fórmula para calcular el área de un polígono regular:

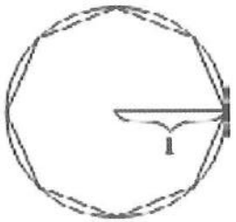
$$\frac{pa}{2}$$

p Perímetro

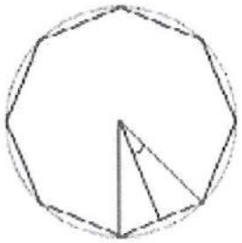
a Apotema

A partir de ésta fórmula podemos obtener interesantes conclusiones. Si inscribimos un polígono de n lados en una circunferencia unitaria (una forma elegante de decir: ponemos los vértices del polígono en una circunferencia de radio 1), y buscamos aplicar esa fórmula, necesitamos primero encontrar la medida del perímetro y la medida del apotema.

Para ello nos fijaremos en uno de los n triángulos formados entre el centro y dos vértices consecutivos del polígono; vemos que el ángulo formado entre los vértices y el centro es de $\frac{2\pi}{n}$. Si partimos ese ángulo a la mitad, $(\frac{\pi}{n})$, podemos ver que la apotema mide exactamente $\cos(\frac{\pi}{n})$ y que la base del triángulo es de $2\sin(\frac{\pi}{n})$.



Podemos obtener una expresión para el perímetro del polígono, pues como tiene n lados, es decir, n veces esa base, es de $2n\sin(\frac{\pi}{n})$ y además, una expresión para el área de nuestro polígono es $n\sin(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})$.



Usamos una simple identidad trigonométrica, que dice que para cualquier ángulo θ, $\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$

Entonces, una expresión simplificada del área del polígono es de

$$\frac{n\sin(\frac{2\pi}{n})}{2}$$

Es interesante sacar tres conclusiones a partir de éstas fórmulas:

a) Sabemos que el perímetro del polígono es siempre menor al perímetro de la circunferencia (pues, para cada uno de los n triángulos, la distancia más corta entre los vértices, es la recta que los une y no la parte de circunferencia que los une) así que, escrito formalmente, concluimos que, para cualquier número natural

$$2n\sin(\frac{\pi}{n}) \leq 2\pi$$

b) Como el polígono queda completamente contenido en la circunferencia, entonces también su área es menor, es decir:

$$\frac{n\sin(\frac{2\pi}{n})}{2} \leq \pi$$

c) Mientras más vértices tomemos, la medida del perímetro y del área del polígono más se aproxima al área de la circunferencia, es decir, mostramos que:

- $$\lim_{n\to\infty} 2n\sin(\frac{\pi}{n}) = 2\pi$$

- $$\lim_{n\to\infty} n\sin(\frac{2\pi}{n}) = \pi$$

¿Se te ocurrió alguna idea interesante en clase?

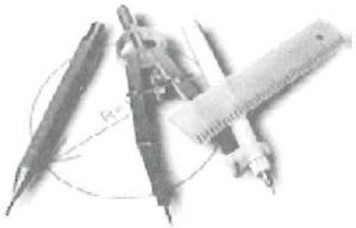
¡Desarróllala y nosotros la publicamos!

Manda tus artículos a laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx

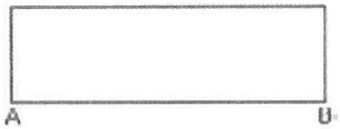
La cuadratura del círculo

Rafael Prieto Curiel
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

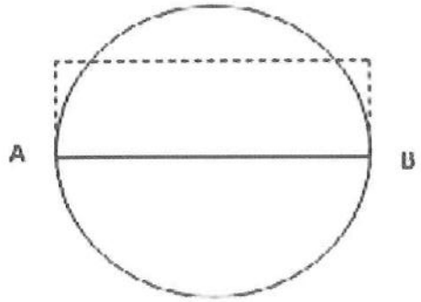
Este es uno de los problemas que motivó por más de dos mil años a los matemáticos del mundo, que consiste en encontrar, utilizando únicamente regla y compás (es decir, métodos geométricos básicos) un cuadrado que contenga la misma área que una circunferencia dada. Este problema se puede generalizar cuando se busca un cuadro que mantenga la misma área que la limitada por alguna curva específica, y es conocido como el problema de cuadrar alguna curva, y tiene su origen en la Grecia antigua, cuando los matemáticos buscaban poder aproximar el área bajo una curva a partir de un cuadrado, y así convertir un problema de cálculo en un simple problema de aritmética.



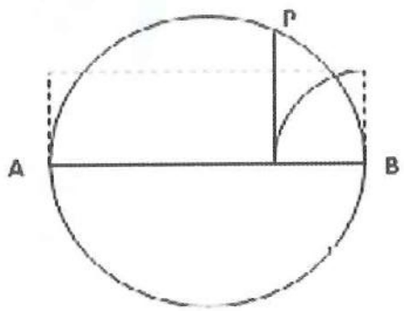
Existen diversas superficies cuadrables, y el caso más sencillo es un rectángulo. Si tenemos un rectángulo como el de la figura, para cuadrarlo se siguen los siguientes pasos:



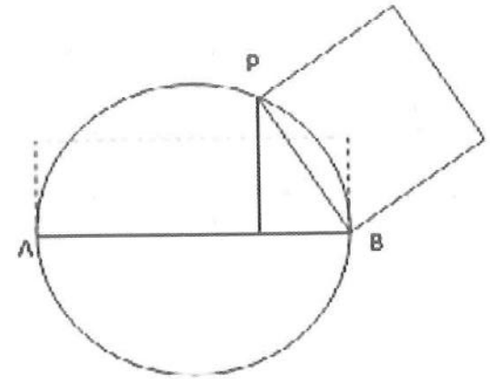
- Se traza una circunferencia que tenga como diámetro el lado mayor del rectángulo AB



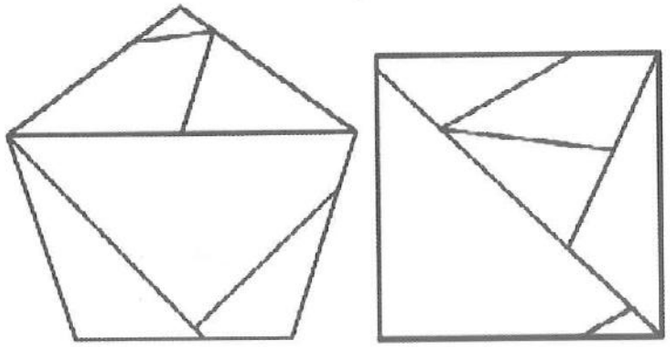
- Se lleva la distancia del lado menor sobre el diámetro, y a partir de ahí se traza una recta ortogonal al diámetro, la cual intersecta a la circunferencia en el punto P.



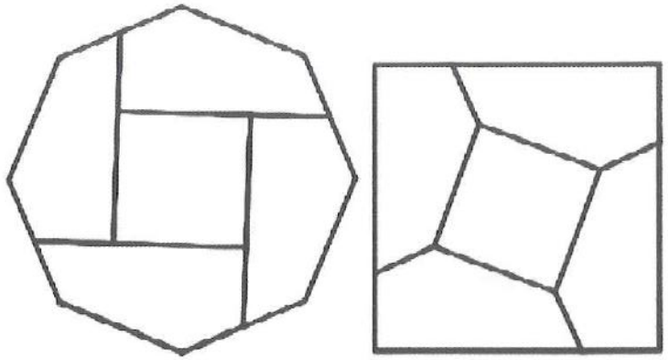
- Se traza un cuadrado formado que tiene como vértices adyacentes P y B. El cuadrado encontrado tiene la misma área que el rectángulo original.



Mediante los métodos de cuadratura del rectángulo y del triángulo, y mediante la descomposición de los polígonos en triángulos, los griegos consiguieron cuadrar cualquier superficie poligonal. Consiguieron con esos métodos cuadrar cualquier superficie de lados rectilíneos.



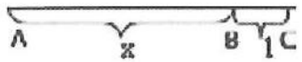
Cuadratura de un pentágono



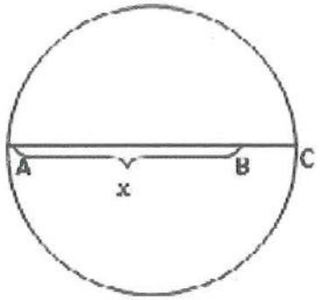
Cuadratura de un octágono

Los matemáticos griegos veían en la geometría la expresión pura de las matemáticas y es por eso que buscaban siempre métodos geométricos para resolver cualquier problema. Consideremos que ellos no contaban con poderosas herramientas como el cálculo o el álgebra, inclusive carecían de un plano cartesiano y su aritmética era bastante precaria. Lograron resolver varios problemas mediante una regla y un compás, por ejemplo, encontrar la raíz cuadrada de un número. El método es como sigue:

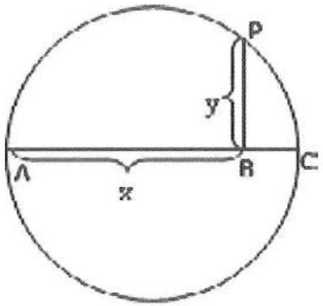
- Se traza la distancia de la cual se busca la raíz cuadrada, x, y el segmento se extiende en una unidad.



- Se traza una circunferencia que tenga como diámetro la distancia $x + 1$.



- Se traza una recta perpendicular al diámetro que pase por el punto x, y la intersección entre esta recta y la circunferencia el punto P.



Notamos que el ángulo CPA es recto, pues extiende un diámetro sobre la circunferencia, y entonces los triángulos $\triangle CPB$ y $\triangle CAP$ son semejantes pues comparten un ángulo, y de igual manera son semejantes $\triangle CAP$ y $\triangle PAB$, por lo que podemos concluir (por transitividad) que $\triangle CPB$ y $\triangle PAB$ son semejantes, y por lo tanto podemos obtener la ecuación: $\frac{x}{y} = \frac{y}{1}$, de donde obtenemos que $y = \sqrt{x}$.

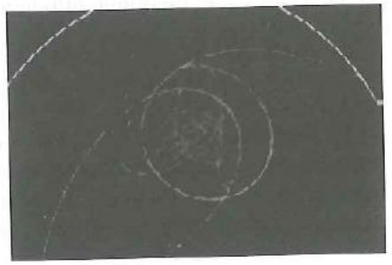
El problema de la cuadratura del círculo se mantuvo abierto durante mucho tiempo, e inclusive Thomas Hobbes creyó haber hallado la solución y la publicó en 1655. En 1882, el matemático alemán Ferdinand Lindemann publicó un trabajo que probaba que π es un número trascendental, de lo cual podía extraerse la conclusión de que es imposible cuadrar el círculo sólo con la regla y el compás. De ahí la frase que utilizan algunos matemáticos al referirse a problemas muy complejos: " ...es como cuadrar un círculo".

La Verdad Matemática.

Jacobo Asse Dayán.
Egresado de la carrera de Matemáticas Aplicadas del ITAM

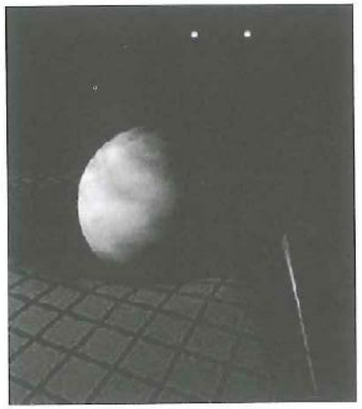
Puede parecer extraño hablar de la "evolución de la verdad", pues suele pensarse que lo verdadero es permanente e invariante. Sin embargo, una breve revisión histórica revela que buena parte de lo que ha sido considerado como verdadero (incluso más allá de toda duda), ha resultado ser falso, o al menos, es actualmente considerado como falso. De hecho, no es sólo el conjunto de hechos considerados como verdaderos el que ha cambiado, sino que los criterios mismos para calificar algo como verdadero han cambiado también, provocando un serio cuestionamiento del concepto mismo de *verdad* que, a la luz de los hechos históricos, queda como un atributo subjetivo y temporal. A tal grado ha sido admitido este carácter temporal de la verdad, que los más prominentes filósofos de la ciencia se sitúan entre la afirmación de que la verdad es algo inalcanzable, y que sólo se puede hablar de teorías que *aún* no han sido falsadas (Karl Popper), hasta la aseveración categórica de que la verdad simplemente no existe (Paul Feyerabend). Así, en el entorno científico actual, más que hablar de verdades, se habla de teorías conjeturales que están ligadas a un cierto contexto desde el cual se les considera.

Sin embargo, existe un campo de conocimiento que ha pretendido escapar a este escepticismo: el de la matemática. El conocimiento matemático ha sido considerado, desde sus inicios, como un conocimiento seguro, absoluto y eterno. Casi cualquier persona estará de acuerdo en que, pase lo que pase, dos más dos son, y siempre serán, cuatro. Pero, cabe preguntarse, ¿qué tiene el conocimiento matemático que nos infunde esta seguridad? ¿Cuál es el mecanismo que nos garantiza que un enunciado matemático es verdadero? ¿En qué difiere el conocimiento matemático del propio del resto de las disciplinas? La respuesta natural es apelar al *rigor matemático* y su principal instrumento *la demostración*, como gran afianzadora de la verdad matemática. Sin embargo, ¿qué es exactamente el rigor matemático? ¿Dónde está definido? ¿Cómo se verifica? De nuevo es preciso voltear hacia la historia para darnos cuenta de que las respuestas a estas preguntas no son en absoluto simples, ni las respuestas ofrecidas constantes a lo largo de la historia. Veámoslo.



A grandes rasgos, la matemática ha pasado por tres etapas principales: la primera es la etapa de la *matemática clásica*, que comenzara en la antigua Grecia y que alcanzara su máxima expresión en los trece libros de *Los Elementos* (320 a.C. aproximadamente) de Euclides.

En estos libros, Euclides parte de veintitrés definiciones, cinco nociones comunes y cinco intuiciones geométricas consideradas por él como evidentes (llamadas postulados), a partir de las cuales logra derivar todos los teoremas conocidos por los matemáticos hasta entonces. Esta forma de hacer matemáticas evolucionaría a lo que ahora es conocido como el método axiomático y fue completamente novedosa para la época, pues, previo a *Los Elementos*, la matemática estaba constituida por una serie de técnicas útiles sin ninguna unidad lógica subyacente. Así, se puede decir que Euclides es el inventor del rigor matemático [1], pues proporciona un criterio para determinar si un enunciado matemático es verdadero o falso: un enunciado es verdadero si puede ser derivado partiendo de los axiomas, que en el caso de Euclides, consistían en sus intuiciones geométricas evidentes.



Sin embargo, no todo era perfección en el sistema de Euclides: su quinto postulado, también conocido como "el postulado de las paralelas", que esencialmente afirma que dos rectas paralelas nunca se cruzan, no parecía tan evidente como los otros cuatro. El mismo Euclides no estaba conforme con él y evitó utilizarlo cuando le fue posible, y no es hasta la demostración de la proposición 29 que éste aparece. Sin embargo, a partir de este punto es frecuentemente usado en las demostraciones de diversas proposiciones importantes.

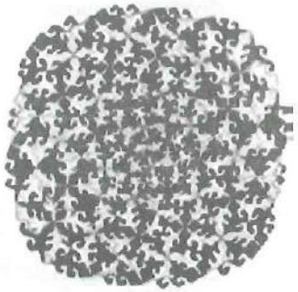
Muchos matemáticos intentaron mostrar que este postulado no era un verdadero postulado, sino una consecuencia lógica de los primeros cuatro postulados. En los dos mil años siguientes surgieron cerca de treinta demostraciones distintas que pretendían haberlo logrado, sin embargo, eventualmente se concluyó que cada una de ellas contenía enunciados no demostrados que eran equivalentes al postulado en cuestión. A finales del siglo XVII y en el siglo XVIII, algunos matemáticos como Girolamo Saccheri y Johann Heinrich Lambert intentaron demostrar el quinto postulado mediante el uso de la reducción al absurdo, es decir, asumieron su falsedad con la intención de llegar a una contradicción. Sin embargo, no lograron encontrar contradicciones válidas; tan sólo llegaron a conclusiones que contradicen a enunciados equivalentes al quinto postulado, tales como que los ángulos de un triángulo no tienen que sumar 180°, o que existen rectas que se acercan entre sí pero nunca se cruzan. Ninguno de ellos le dio importancia a estas conclusiones, que, en palabras de Saccheri "tienen efectos repugnantes sobre la naturaleza de las líneas rectas", y no fue sino hasta 1829 que Nicolai Lobachevsky publica un artículo proponiendo la existencia y validez de estas geometrías, que a la postre serían conocidas como geometrías no-euclidianas. La gran diferencia entre la geometría Euclidiana y estas nuevas geometrías es que, mientras la primera se sitúa en un plano, las no Euclidianas se sitúan sobre superficies curvas como esferas, discos o hiperboloides. Esta 'pequeña' alteración, la simple supresión del postulado de las paralelas, afecta a todos los objetos definidos por Euclides en *Los Elementos*, engendrando una infinidad de nuevas geometrías.

La caída del quinto postulado tuvo dos consecuencias que cambiaron la concepción de las matemáticas de forma radical: primero, hizo imposible sostener que la geometría es la base de las matemáticas, pues habiendo una infinidad de geometrías, cada una de ellas con resultados completamente distintos, ésta no podía constituir una base firme. Y segundo, provocó que se intentara excluir por completo a la intuición del razonamiento matemático:

> Por más de dos mil años, *Los Elementos* sirvieron de 'Biblia matemática', fundación del método axiomático y fuente del conocimiento deductivo. Los postulados de Euclides, sin embargo, están basados en nuestra (o su) intuición de los objetos geométricos. Con el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas, *Los Elementos* fueron examinados a fondo y se encontraron omisiones lógicas. Como resultado, la intuición fue excluida del método axiomático, y éste fue formalizado[2].

Así, con el surgimiento de las geometrías no euclidianas, se hizo evidente que si se espera que el rigor matemático garantice certeza, no puede depender de las intuiciones geométricas de Euclides ni de nadie más. Por ello, a partir de ese momento, el énfasis se apartó de las propiedades geométricas de los objetos matemáticos, y se trasladó a su estructura lógica. Este cambio nos introduce a la segunda etapa en la historia de las matemáticas, la de las *matemáticas modernas*, cuya definición de rigor recaería en la demostración lógica de los enunciados matemáticos.

Sin embargo, la demostración como medio para encontrar verdades absolutas es necesariamente confrontada con la necesidad de probar su efectividad en algún sentido. Esto quiere decir que la demostración debe ser seguida de una demostración de que es correcta, otra de que la demostración de la demostración lo es, y así hasta el infinito[3].



Este regreso al infinito es ilustrado extraordinariamente por la paradoja Carroll, ideada en 1895 por el matemático y escritor inglés Lewis Carroll, en la que muestra que no hay nada que distinga a los enunciados que forman parte de una demostración matemática, de los enunciados que ella pretende demostrar. De modo que es inevitable que surja la pregunta de ¿qué es una demostración matemática? Y, ¿qué es lo que demuestra?

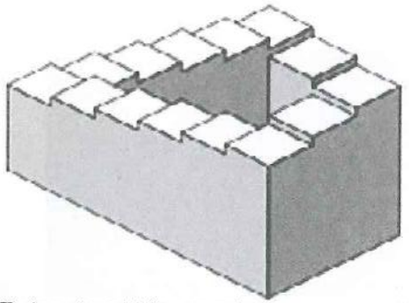
Ante estas dificultades surgió, a principios del siglo XX, la corriente denominada *formalista*, presidida por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943), que sostiene que los enunciados matemáticos pueden ser vistos como simples cadenas de símbolos que pueden ser generadas utilizando ciertas reglas arbitrarias y aplicando las leyes de la lógica. Bajo esta visión, los términos matemáticos pierden por completo su significado, y la veracidad de un enunciado es verificada exclusivamente por la forma en la que los símbolos están concatenados. Así, la demostración matemática consistiría en lograr derivar la cadena apropiada

dentro de un 'sistema formal', y no habría lugar para ningún tipo de ambigüedad procedente de definiciones intuitivas de los términos.

La consigna de esta corriente, encarnada en el llamado *Programa de Hilbert*, era la de lograr establecer una correspondencia entre los enunciados matemáticos considerados verdaderos, y las cadenas que son derivables dentro de un sistema formal. Y esta correspondencia debería cumplir con dos características fundamentales: primero, debería ser consistente, es decir, si un enunciado pertenece al sistema formal, entonces su negación no puede hacerlo; y segundo, debería ser completo, es decir, dado cualquier enunciado matemático expresable en la terminología del sistema formal, éste debe ser capaz de determinar si el enunciado pertenece a él, o si es su negación la que lo hace.

El requisito de completud nos interesa particularmente para nuestro análisis de lo que es una demostración matemática. La corriente formalista buscó evitar el regreso al infinito en las demostraciones estableciendo que una demostración es definitiva una vez que es expresada en términos del sistema formal. Sin embargo, para que este criterio fuera considerado como adecuado, era necesario mostrar que esta formalización de la matemática era capaz de abarcar a todos los resultados matemáticos conocidos, es decir, que no se dejarían fuera de la matemática resultados que eran considerados como verdaderos. Por ello, el objetivo del *Programa de Hilbert* era lograr una formalización consistente y completa de toda la matemática. Este objetivo parecía ser viable, el mismo Hilbert logró una axiomatización tal de la geometría Euclidiana, y la publicación de *Principia Mathematica* (1910) por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, parecían ser promesas de éxito.

Sin embargo, en 1931, el lógico austriaco Kurt Gödel echó por tierra esta pretensión con sus famosos *Teoremas de Incompletud*. En ellos, Gödel demuestra que cualquier sistema matemático formal que contenga un mínimo de aritmética, contiene proposiciones no decidibles, esto es, que no pueden ser demostradas ni refutadas por el sistema. Lo que es más, Gödel demostró que la proposición que postula la consistencia de la aritmética también es no decidible. De modo que todo sistema matemático que contenga un mínimo de aritmética (prácticamente cualquier sistema no trivial) no sólo es incompleto, sino que, además, su consistencia es indemostrable. Los teoremas de Gödel implican que "nadie podrá nunca escribir una lista de axiomas y pretender con razón que toda la matemática se deduce de ellos" [4].



Este resultado nos introduce a la tercera de las mencionadas etapas de la matemática, la etapa denominada *cuasi-empirista*, misma que prevalece hasta el día de hoy.

Bajo esta visión, se admite que no existe una lógica subyacente a todas las matemáticas -ni

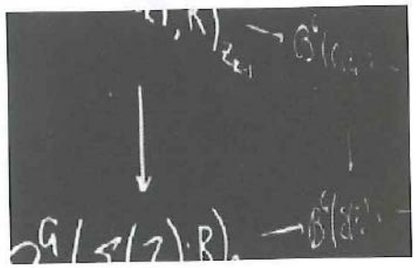
las intuiciones geométricas de Euclides, ni la consistencia formal de Hilbert nos proveen de un criterio para separar a la verdad de la falsedad matemática- de modo que, para defender a nuestra apreciada disciplina, nos vemos obligados a apelar a la utilidad que ella nos brinda: las matemáticas deben ser verdaderas, pues de otra manera no serían tan útiles en la práctica de las ciencias naturales y sociales.

Bajo esta concepción de la matemática, el único rigor posible es el mismo que existe en el resto de la actividad humana, de modo que hoy en día "una demostración es considerada como rigurosa si los mejores especialistas en la materia no tienen nada que objetar [5] . Naturalmente que, con el cambio de especialistas, también cambia la matemática:

> El Teorema de Gödel arroja un resultado unánime: la verdad matemática no es pura consistencia formal o deducibilidad que lleva a dotarla de un carácter apodíctico, de absoluta certeza, a priori. Los resultados matemáticos se presentan a la luz de dicho teorema como falibles, provisionales y aproximados, como lo son los resultados de las ciencias naturales [6].

Pero, ¿qué significa que la matemática sea falible, provisional y aproximada? ¿Es que dos más dos no son exactamente cuatro, para siempre y con toda seguridad? Dudar de ello parecería ser "repugnante a la naturaleza de los números" y, en realidad, la cuestión no es así de simple: dos líneas paralelas sí se pueden cruzar si el espacio en el que se encuentran no es el plano Euclidiano, pero no de otra forma. El sistema definido por Euclides jamás consideró que los objetos pudieran estar en otro espacio, pues jamás se había concebido la posibilidad de otro espacio. Su sistema descansaba sobre un postulado tácito: que el espacio es plano. Asimismo, dos más dos seguirán siendo cuatro siempre que la concepción del conjunto de los números naturales, de la relación de igualdad y de la operación de la suma sigan siendo las mismas, es decir, siempre que los postulados tácitos que acompañan a este enunciado no cambien. ¿Cuáles son estos enunciados tácitos? Por ahora nos son inconcebibles, es por ello que se mantienen ocultos. Cuando dejen de serlo será porque hemos descubierto una nueva posibilidad para alguno de los conceptos involucrados en el enunciado y, así como actualmente debemos especificar que para que dos líneas paralelas no se crucen deben estar en un plano, para que dos más dos sean cuatro deberemos especificar explícitamente que nuestro nuevo postulado se cumple. No es que los resultados de la matemática actual no sean exactos, sino que son relativos a un conjunto de nociones propias de nuestro tiempo.

La caída del quinto postulado de Euclides no es más que un caso particular que ilustra lo que nos dicen, de forma más general, los teoremas de Gödel: que no existe una lista definitiva de axiomas generadores de la matemática; que todo resultado está apoyado tácitamente en supuestos inadvertidos; que estos supuestos seguirán cambiando; y que conforme ellos cambien también cambiará la verdad matemática.



Bibliografía

1. Hofstadter, Douglas R. (1979) Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. Basic Books, Inc. N.Y.
2. Bogomolny, Alexander (1996) "Non-Euclidean Geometries"
   En http://www.cut-the-knot.com/triangle/pythpar/NonEuclid.shtml.
3. Otte, Michael (1994). "Is Radical Constructivism Coherent?" En: Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education. Editado por: Paul Ernest. The Falmer Press, Londres. Pp.50-61.
4. Allen Paulos, John (1993) Más Allá de los Números. Tusquets Editores, Barcelona.
5. Thom, René (1970) "¿Son las Matemáticas 'Modernasún Error Pedagógico y Filosófico?" En: La Enseñanza de las Matemáticas Modernas. Hernández, Jesús. Alianza Universidad, España. Pp. 115-129
6. Díaz Muñoz, Guillermina (1995) Zubiri y la matemática: un nuevo constructivismo. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid.
   En http: //www.zubiri.org/works/spanishworksabout/munoz /chapter5.htm

¡ANÍMATE!

¡ESCRIBE A LABERINTOS E INFINITOS!

Envía tus artículos a laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx

¿Quiéres ser un "Quant"?

Scott Adams.
Profesor de la Universidad de Minnesota

Muchas personas interesadas en las matemáticas, tienen curiosidad en cómo se utilizan las matemáticas en finanzas. Algunas personas tienen cierta inclinación por una carrera en finanzas cuantitativas, mientras otras, que están ya involucradas en el mundo de las finanzas y los mercados de capital, tienen interés en aprender más sobre los fundamentos matemáticos subyacentes.

Por todas partes del mundo proliferan los programas en Matemáticas Financieras e Ingeniería Financiera, llenando una creciente necesidad educativa. La Asociación Internacional de Ingenieros Financieros, es la organización que agrupa y promueve estos programas (www.iafe.org)

El crecimiento de los programas en Matemáticas Financieras, fue el tema de un artículo en el Wall Street Journal ("Wall Street Warms to Finance Degree with Focus on Math ", 14 de Noviembre del 2006) publicado por Ronald Asop. Fue también el tópico de la portada de la edición del 23 de Enero del 2007 del Business Week y en la primavera del 2004, el tema fue el interés principal de un programa llamado "Modelado Cuantitativo en Finanzas y Econometría" del Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones (www.ima.umn.edu).

Los principios matemáticos de las Matemáticas Financieras, se hallan en la teoría de probabilidad, las ecuaciones diferenciales parciales y el análisis numérico. En el ámbito financiero, los temas principales son la valuación de los derivados financieros, la evaluación de riesgos y la administración de portafolios. En el mundo actual, muchos aspectos del manejo de mercados de capital, con cuantitativa y computacionalmente sofisticados, pero tomo empezó con los derivados.

Un derivado es un instrumento financiero cuyo valor se determina por otro instrumento, llamado subyacente. Un ejemplo simple: supón que yo poseo una acción con un valor de venta de $1 al día de hoy y que te ofrezco un contrato a plazo fijo que me compromete a venderte esta acción, en un año a partir de hoy, por $1.03. Nada de dinero cambia de manos en este momento. Supón que tienes acceso a un bono que te ofrece el 6 % de interés efectivo anual y, finalmente supón que tienes un amigo que, como yo, posee una acción del mismo tipo y no tiene planes de venderla en el próximo año. Tu amigo está dispuesto a prestarte su acción por un año, a condición de que la devuelvas al término de ese periodo, más una cuota de dos centavos.

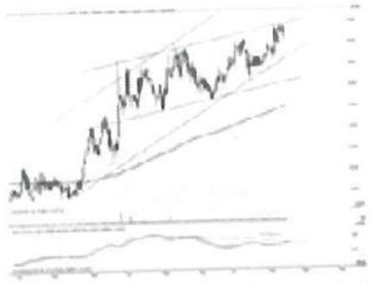
Entonces puedes hacer dinero garantizado: firmas el contrato a plazo fijo conmigo, le pides prestada la acción a tu amigo, la vendes por $1 y depositas ese dinero en el banco. Un año después, en el banco tienes $1.06. Cumplir tu contrato conmigo, te cuesta $1.03, lo que te deja con una acción y tres centavos. Le regresas a tu amigo su acción más los dos centavos que te pidió y te queda un centavo, que tus herederos pueden disputarse.

El punto es este: yo fijé mal el precio de mi contrato en $1.03, su valoración correcta debió de $1.04 y mi error, te dio la oportunidad de ganar un centavo. Encontrar el valor correcto de un contrato a plazo fijo, depende de conocer otros valores y así, el contrato "deriva" su valor de otras variables del mercado, como el valor de la acción subyacente. Es por ello que le llaman un derivado (¡muy diferente a una derivada en el sentido del cálculo!). Esto contrasta con la acción, cuyo valor proviene del trabajo dedicado de las personas que trabajan en la compañía que la emitió.

Hay dificultades que pueden surgir al valuar los contratos a plazo fijo, pero no es tan complicado como valuar otros derivados financieros. Existen muchas herramientas ingeniosas para fijar los precios de los productos financieros más sofisticados.

En el ejemplo del contrato mal valuado, había dinero, libre de riesgos, por obtener (siempre que las partes involucradas cumplieran su compromiso). A menudo las cosas no son tan simples, a veces se está en una situación de riesgo, a decir verdad, el riesgo incluso aparece al suponer que los individuos y las compañías cumplirán con sus obligaciones.

Medir el riesgo de los bienes que pertenecen a cada socio de una compañía, es una difícil tarea matemática. Se tiene que estar conciente de que los riesgos no simplemente se acumulan, a veces se cancelan entre ellos y a veces no. Supón que invertiste en 100 operaciones riesgosas, cada una de las cuales tiene un 10 % de probabilidad de que pierdas $1000 pero un 90 % de que ganes $1000. Te sientes muy seguro, ¿verdad?. Sin embargo, tu sentimiento de seguridad quizás disminuya si averiguas que una subida en el precio del petróleo, podría causar que todas las operaciones vayan mal y, para cada una, el 9 % del 10 % malo, está completamente determinado por el petróleo. Supón ahora que encuentras otras 100 operaciones con las mismas probabilidades (10 % y 90 %) y con los mismos rendimientos (pierdes $1000 o ganas $1000), pero que son independientes entre sí. Entonces deberías cambiar tus inversiones actuales por estas nuevas. El negocio de manejar portafolios de inversión, mediante el entendimiento de los riesgos y los rendimientos, es otro tema clave en el área de las Matemáticas Financieras.



La simplicidad de estas ideas da lugar, en las finanzas modernas, a matemáticas muy sofisticadas. Por ejemplo, un enfoque completamente nuevo fue necesario para poder aplicar cálculo a procesos con elementos aleatorios, como las bolsas de valores y la física quántica.

Kiyoshi Itô, el matemático mayormente responsable de los fundamentos del cálculo estocástico, fue galardonado recientemente con la medalla Gauss, un nuevo premio que se dará cada cuatro años "por contribuciones matemáticas sobresalientes que encuentren aplicaciones significativas fuera de las matemáticas". La aplicación de matemáticas avanzadas a las finanzas, ha tenido un profundo impacto en la economía global. Casi cualquier edición de revistas de negocios, como Business Week o The Economist, tendrán discusiones sobre nuevos productos financieros, derivados de crédito y títulos respaldados por hipotecas, que dependen de estas matemáticas. Los bancos de inversión y los bancos de comercio, emplean hoy a miles de personas con altos grados académicos (doctorados en Matemáticas y Física, maestrías en Ingeniería Financiera y Matemáticas Financieras), para trabajar con estos productos. Esto representa uno de los segmentos de la industria que crecen más rápidamente. Decenas de miles de expertos en cómputo e informática, con empleados para programar estos cálculos. La nueva, emocionante y rápidamente creciente industria de fondos de alto riesgo, utiliza también muchas de estas ideas y emplea el mismo tipo de personas. En 1997, Robert Merton y Myron Scholes, dos de los pioneros de las Matemáticas Financieras, recibieron el premio Nóbel en economía, como reconocimiento al papel central que su labor ha tenido en el mundo de las finanzas.
Con la creación de regulaciones más estrictas (acuerdos de Sabarnes-Oxley y Basel) y el creciente conocimiento en la gestión cuantitativa de riesgos, las perspectivas de trabajo para los "quanta" se ha estado elevando. Personas con habilidades matemáticas para realizar este tipo de análisis, están siendo más y más demandadas. Más aún, el mundo de los datos en las finanzas, es la envidia de estadísticos profesionales en todas partes!

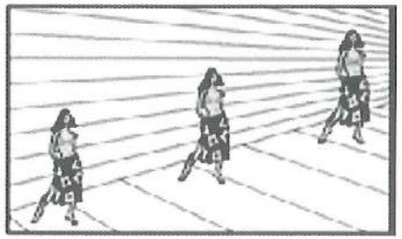
Scott Adams es el director de la nueva Maestría en Matemáticas Financieras de la Universidad de Minnesota, campus Twin Cities. Recibió su doctorado en matemáticas por la Universidad de Chicago en 1987 bajo la supervisión de Robert J. Zimmer, quien ha jugado un papel central en la conformación del programa de matemáticas financieras de Chicago.

Reprinted with permission of FOCUS, the newsletter of the Mathematical Association of America (incorporated).

Traducido por Paulina Preciado López.
Egresada de Matemáticas Aplicadas del ITAM.

Activa tus neuronas

LAS HERMANAS JONES.



Las hermosas hermanas Jones tienen la fama de que si te encuentras a dos de ellas, la probabilidad de que ambas tengan los ojos azules es de $\frac{1}{2}$. Se sabe que las hermanas Jones no son más de 10, entonces, ¿cuántas hermanas son y cuántas tienen los ojos azules?

La respuesta es que son 4 las hermanas Jones, de las cuales 3 tienen los ojos azules, y lo podemos razonar así: supongamos que en total b hermanas de las n tienen ojos azules, entonces la probabilidad de encontrarnos con dos de ojos azules es de $\frac{b(b-1)}{n(n-1)}$. Al igualar esta expresión a $\frac{1}{2}$, obtenemos la ecuación: $2b(b-1) = n(n-1)$, y es sólo cuestión de buscar las soluciones enteras de esa ecuación. Vemos que las posibles respuestas son $b = 3$ y $n = 4$, y las siguientes respuestas enteras de la ecuación son 21 hermanas, de las cuales 15 con ojos azules o 120 hermanas, con 85 de ojos azules.

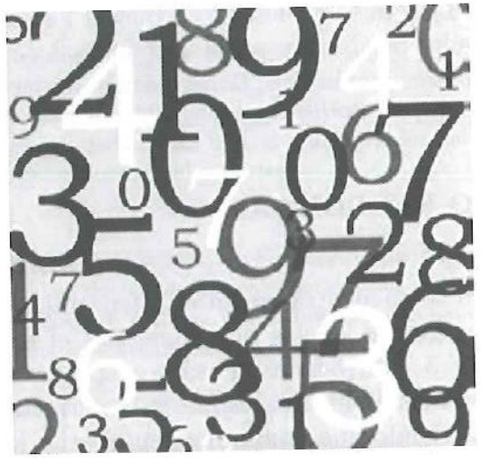
PASAR O REPROBAR.

Un alumno se encuentra en un examen oral, y lleva de las siete preguntas de las que consistirá el examen, 3 acertadas y 3 equivocadas. Pasar o reprobar depende únicamente de si la última respuesta es correcta o no; el profesor, sabiendo que el alumno reprobaría, le hace la última pregunta: ¿Pasarás el examen?

El alumno, después de mucho pensar la situación, y de analizar los posibles casos contesta al profesor "reprobaré", dejando al profesor perplejo por la respuesta. Si el alumno hubiera contestado que aprobaría el examen, entonces el profesor tendría totalmente la decisión de reprobarlo o no, pues si argumenta que contestó mal, estaría reprobado, y por el otro lado, si argumenta que contestó bien, pasaría. Sólo el profesor tendría la decisión. En cambio, con la sorpresiva respuesta, el profesor no tuvo opción. Por un lado, si decidía reprobarlo, entonces la respuesta hubiera sido correcta, lo que implicaría que el alumno aprobó! Y por otro lado, si decidía pasarlo, entonces la respuesta hubiera sido incorrecta y el alumno reprobaría! A veces es bueno hacer que los profesores también se rompan la cabeza.

142857, UN NÚMERO MISTERIOSO.

Si tomamos el número 142857, y lo multiplicamos por 1, 2, 3, 4, 5 y 6 vemos que:



- 1 x 142857 = 142857
- 2 x 142857 = 285714
- 3 x 142857 = 428571
- 4 x 142857 = 571428
- 5 x 142857 = 714285
- 6 x 142857 = 857142

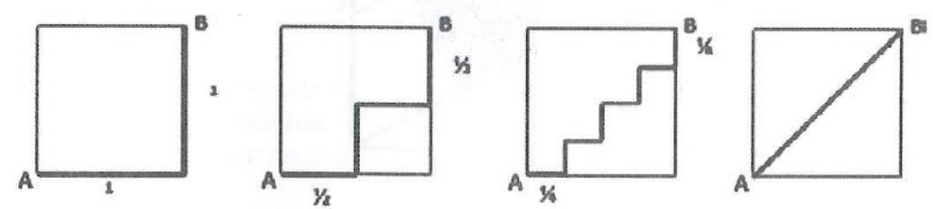
Notamos que es el mismo número y en el mismo orden, pero en un ciclo. ¿y qué pasa si lo multiplicamos por 7? 7 x 142857 = 999999. Rompe la tendencia, pero vemos que:

- $\frac{1}{7} = 0{,}14285714285714285714\ldots$
- $\frac{2}{7} = 0{,}28571428571428571428\ldots$
- $\frac{3}{7} = 0{,}42857142857142857142\ldots$
- $\frac{4}{7} = 0{,}57142857142857142857\ldots$
- $\frac{5}{7} = 0{,}71428571428571428571\ldots$
- $\frac{6}{7} = 0{,}85714285714285714285\ldots$

Pero eso no es todo; si tomamos los últimos tres dígitos (es decir, 857) y los primeros tres dígitos (el 142) y tomamos la diferencia de sus cuadrados obtenemos: $857^2 - 142^2 = 714285$. Otra vez los mismos números y en el mismo orden! Y así podemos seguir jugando con este número misterioso, obteniendo más propiedades.

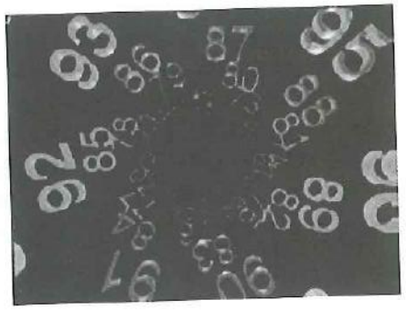
PARADOJA ESCALONADA

Supongamos que tenemos que hacer un viaje de A a B en una cuadrícula, como lo muestra la figura. Vemos que es posible ir primero en sentido horizontal y luego en sentido vertical, recorriendo así un total de dos unidades. Pero si tomamos una desviación y hacemos estos dos recorridos en dos partes (como lo muestra la figura) en total recorremos $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ unidades, la misma distancia. Si lo hacemos en 4, llegamos a la misma conclusión: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$. Siempre recorremos la misma distancia. Sin embargo, si seguimos ente proceso indefinidamente, nos aproximaríamos cada vez más a la diagonal del cuadrado que une A con B, cuya distancia (gracias al Teorema de Pitágoras) sabemos que es $\sqrt{2}$. Tenemos entonces una sucesión de medidas constantemente 2 que converge a una medida de $\sqrt{2}$. ¿Puedes encontrar el problema?



UNA SUCESIÓN.

0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9,? ¿Podrías encontrar el término que sigue en la sucesión? La sucesión fue construida de la siguiente manera:



- El primer término indica el número de primos menor o igual a 1
- El segundo término indica el número de primos menores o iguales a 2

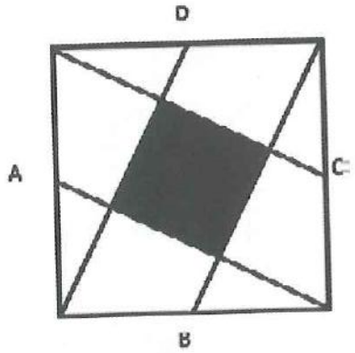
  ⋮

- El n-ésimo término indica el número de primos menores o iguales a n

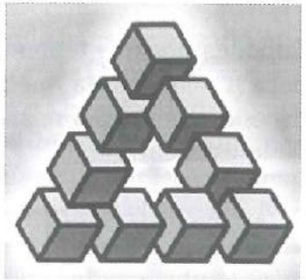
Así, el término 28 de la sucesión es 9, pues hay 9 primos menores o iguales a 28, que son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23. ¿y cuál es el término 100 de la sucesión?

UN POCO DE GEOMETRÍA.

Tomemos el cuadrado de 10cm de lado, como lo muestra la figura, con A, B, C y D los puntos medios de cada lado. ¿Cuál es el área del cuadrado sombreado?



Zona Olímpica



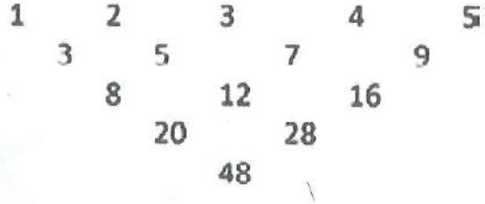
1. Si $|x|+x+y=10$, y también $x+|y|-y=12$, encuentra $x+y$

2. Encuentra todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y 7, y cada uno de sus dígitos es 3 o 7.

3. Si a, b, c y d son 4 enteros positivos tal que $ab=cd$, prueba que $a+b+c+d$ no es primo.

4. ¿Para cuántos enteros positivos x, son agudos todos los ángulos del triángulo cuyos lados miden 10, 24 y x?

5. Si se construye un triángulo como el de la figura, pero empezando con los números del 1 al 2008 en el primer renglón, y a partir del segundo renglón, cada número es la suma de los dos números arriba de él, ¿cuál es el número que ocupa el vértice inferior del triángulo?

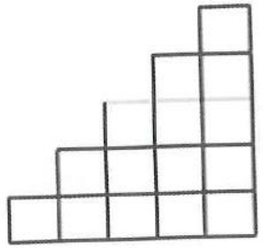


6. Se dice que un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos hay tales que al multiplicarlos por 11 se obtiene un número capicúa?

3. 14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781 64

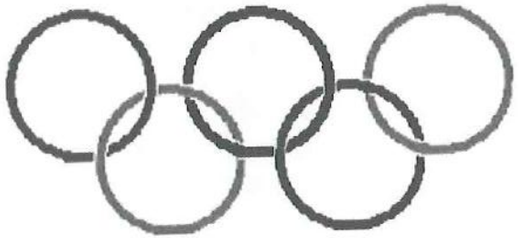
7. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los números del 1999 al 2008 de tal forma que ni el primero, ni la suma de los primeros dos, ni la suma de los primeros tres,..., ni la suma de todos sea un múltiplo de tres?

8. Supongamos que tenemos una escalera de n escalones (como en la figura, para $n = 5$). ¿Para qué n se puede cubrir la escalera con n cuadrados (no necesariamente del mismo tamaño) sin que estos se traslapen ni se salgan de la escalera?



Revisa las respuestas en la página de internet

http://laberintos.itam.mx



TRANSIRE SVVM PECTUS MVNDOQUE POTIRE

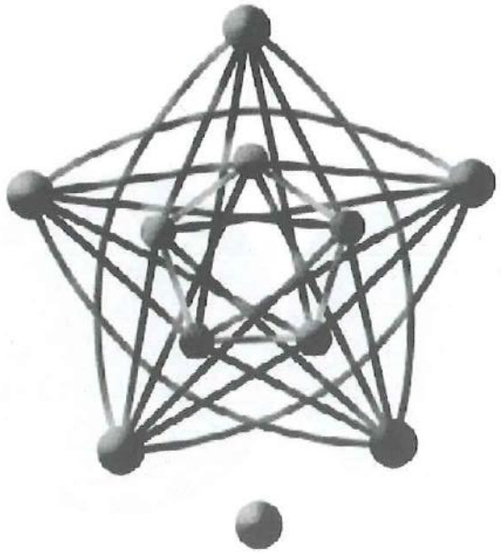
Ignacio Moreno
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

Los premios Nobel se otorgan anualmente a personas que hayan realizado investigaciones sobresalientes o hayan hecho contribuciones notables a la sociedad. Hay premio Nobel de Física, Química, Literatura, Paz, Fisiología o Medicina y Literatura, y a partir de 1968 se instituyó el Nobel de economía, aunque en realidad es llamado Premio Banco de Suecia en Ciencias Económicas en Memoria de Alfred Nobel. A mucha gente sorprende que no exista el premio Nobel de Matemáticas, y la explicación es una leyenda que Alfredo Nobel se llevaba exageradamente mal con el que, con toda probabilidad, hubiera sido el primer premio Nobel de matemáticas: el matemático sueco Gösta Mittag-Leffer (por sus sobresalientes logros en el análisis complejo), pues se afirma que existía un asunto de faldas entre ambos. En su lugar, el Congreso Internacional de Matemáticas de 1924, presidido por John Charles Fields, presentó la propuesta de unas "medallas internacionales para destacados descubrimientos matemáticos".

Este premio se otorga cada cuatro años, y sólo lo pueden recibir matemáticos menores a 40 años. En cada edición de los premios se otorgan al menos dos medallas y a lo más cuatro.

Las medallas están acuñadas en oro, y tienen una inscripción latina "TRANSIRE SVVM PECTUS MVNDOQUE POTIRE" que significa "sobrepasar su

propio entendimiento y apoderarse del mundo" junto con el busto de Arquímedes, con su nombre escrito en griego. En el reverso de lee la inscripción "CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA TRIBVERE" que es "reunidos los matemáticos de todo el mundo para premiar las obras maestras" y al fondo se puede ver el dibujo de la inscripción de una esfera dentro de un cilindro - uno de los más famosos descubrimientos de Arquímedes- y en el canto se inscribe el nombre del galardonado. En 2006 se realizó el más reciente Congreso Internacional de Matemáticas en la ciudad de Madrid, en el cual fueron ganadores de la medalla Fields: Andrei Okounkov por sus logros en la rama de la probabilidad y la geometría algebráica, Terence Tao por sus contribuciones al análisis armónico y teoría de números, Wendelin Werner por sus avances en paseos aleatorios y evolución estocástica y Grigori Perelman, por "sus contribuciones a la geometría y sus ideas revolucionarias en la estructura analítica y geométrica del flujo de Ricci", sin embargo, Perelman rechazó el premio y no asistió al congreso. México no cuenta con ningún galardonado con la medalla Fields, sin embargo, cuenta con tres premios Nobel: Alfonso García Robles ganó el Nobel de la Paz en 1982, Octavio Paz en 1990 de Literatura y Mario Molina fue ganador del Nobel de Química en 1995.



MEDALLA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

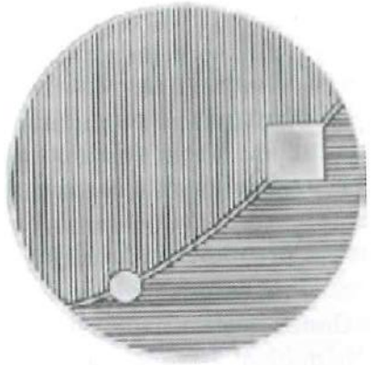
Manuel Azuara Lois
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

Pocas veces se reconoce a las Matemáticas como pilar y fuerza impulsora de las tecnologías existentes en el mundo moderno, cuando en realidad, afectan diversas áreas de la vida diaria de maneras poco perceptibles en un principio, pero que resultan ser fundamentales para el desarrollo de la tenología. Con el fin de hacer notar estas importantes contribuciones, La Unión Matemática Internacional, propuso el premio Carl Friedrich Gauss por Aplicaciones en Matemáticas.

El premio Gauss es un premio otorgado conjuntamente por la IMU (Internacional Mathematical Union) y la DMV (Sociedad Matemática Alemana) por contribuciones matemáticas sobresalientes que hayan tenido importantes aplicaciones fuera del área de las Matemáticas puras y por contribuciones que hagan posible la aplicación de métodos matemáticos fuera de las Matemáticas puras en una forma inovadora (por ejemplo, técnicas de modelado y diseño e implementación de algoritmos). Dado que la utilidad práctica de muchos resultados matemáticos generalmente no se ven hasta muchos años después de haber sido obtenidos, no hay un límite de edad como restricción para recibir el premio. El premio también puede ser otorgado a un grupo de personas que conjuntamente cumplan con los requisitos anteriores, o cuyas contribuciones individuales hayan logrado una contribución digna de ser premiada. El premio fue anunciado el 30 de abril de 2002, el 225 aniversario del nacimiento de Gauss, otorgándose cada cuatro años en el Congreso Internacional de Matemáticas (ICM) y el ganador obtiene la medalla Gauss y una pequeña recompensa monetaria de 10,000 euros.

Únicamente se ha llevado a cabo una entrega de este premio, fue en el IMC en Madrid el 22 de agosto de 2006, con una presentación enfocada al público en general y a reporteros, con el fin de que se aprecie la importancia de las Matemáticas en la vida diaria. El ganador del premio fue el matemático japonés Kiyoshi Itô por su trabajo en el desarrollo del análisis estocástico, permitiendo la formulación y solución de ecuaciones diferenciales estocásticas. La teoría desarrollada por Itô es lo suficientemente abstracta para aplicarse a campos muy distintos de la ciencia y la vida diaria, por ejemplo, gracias a su trabajo, se llegó a la ecuación de Black Scholes, usada para estimar el valor presente de una opción para compra o venta de acciones en el futuro. Su teoría también

tuvo impacto en Biología, ya que permite calcular la probabilidad de que un gen en una población domine o bien, que una especie se extinga.



La medalla ilustra el poder de aplicación de las Matemáticas: Por un lado presenta una serie de líneas verticales que forman la figura de Gauss, y en el reverso, se simbolizan el método de mínimos cuadrados y el descubrimiento de la órbita de Ceres, ya que fue Gauss quien después de haber dearrollado la teoría de mínimos cuadrados, pudo predecir el movimiento de Ceres. Todo esto simbolizado con elementos básicos de las matemáticas, la línea recta, una curva, el círculo y el cuadrado.
La siguiente entrega del premio Gauss será en agosto de 2006 en el Congreso Internacional de Matemáticas cuya sede será la ciudad de Hydebarad en India.

¡ESCRIBE PARA LABERINTOS E INFINITOS!

Envía tus artículos a

laberintoseinfinitos@yahoo.com.mx

AXIOMA

echa
transmitimos tu proyecto

factorial

Crea