Cuatro colores

José David Mireles Morales

Como muchos de ustedes habrán supuesto por el título, este texto trata sobre la posibilidad de colorear un mapa con 4 colores de tal modo que no haya dos países vecinos (que haya una línea común que tiene el papel frontera) coloreados con el mismo color, es decir, está permitido que países que comparten sólo un punto tengan el mismo color. Este problema surgió en 1852 con una carta de Augustus De Morgan a Sir Rowan Hamilton, ambos famosos científicos quienes frecuentemente intercambiaban ideas de manera epistolar. El problema no interesó lo suficiente a Hamilton, sin embargo De Morgan persistió en su intento de resolverlo, involucrando a muchos matemáticos más. Esta inquietud culminó en 1976 con una demostración por Wolfang Haken y Ken Appel, usando más de 1200 horas-máquina, por esto la validez de la prueba ha sido discutida e incluso descalificada.

Establezcamos las hipótesis para el siguiente teorema:

- El mapa tiene que ser plano, un mapa en un toro u otro tipo de superficie no tiene por qué ser 4-coloreable; esto lo trataremos más adelante.
- Los países tienen que ser conexos; si pensamos en la configuración mundial de hace algunos años, donde países como Inglaterra o Francia tenían muchas colonias, probablemente no podríamos colorear el mapa si exigiéramos que las colonias fueran pintadas del mismo color que el colonizador.
- Países que sólo comparten un punto pueden ser coloreados con el mismo color, de no ser así el problema sería trivial pues, por ejemplo, un mapa en forma de pay con n rebanadas necesitaría n colores distintos para colorearse de esta manera.

Empecemos pues a atacar el problema y a demostrar la versión más simple para solucionarlo.

Teorema: En todo mapa existe un país con a lo más 5 vecinos.

Demostración: Notemos que podemos pensar el mapa como una gráfica, donde los vértices son los puntos donde colindan 3 o más países, las aristas de la gráfica las fronteras entre los países y las caras son los países. Si denotamos por V el número de vértices, C el número de caras y A el número de aristas sabemos, gracias a Euler, que V+C-A=2,

donde contamos a todo el exterior como un país. Entonces, como de cada vértice salen al menos 3 aristas:
A>=3/2 V . Supongamos que no existe ningún país con menos de 6 vecinos, entonces A >= 6/2 C=3C, lo que implica que:
V+C-A<= 0. Por la fórmula de Euler[1] 2<=0, lo cual es una contradicción, así podemos concluir que existe un país con 5 o menos vecinos.

Usando el teorema anterior vamos a demostrar el siguiente:

Teorema: Todo mapa es 6-coloreable.

Demostración: Procederemos por inducción, claramente todos los mapas con 6 países o menos pueden ser coloreados con 6 o menos colores. Supongamos que todos los mapas con a lo más *n* países pueden ser coloreados con 6 colores y veamos que un mapa M con *n+1* países puede ser colorado con 6 colores.

Por el lema anterior en *M* hay un país *p* con a lo más 5 vecinos. Sin pérdida de generalidad se ve como en el primer dibujo. Apliquémosle la transformación que se indica para obtener un mapa *M2* (si el país tiene menos de 5 vecinos será claro qué hay que hacer):

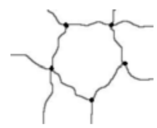

Fig. 1

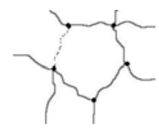

Fig. 2

Este nuevo mapa tiene un país menos que *M*, así que es 6 coloreable, démosle una coloración apropiada y regresemos a *M* y volvamos a pintar a *p*. Como *p* tiene a lo más 5 vecinos, hay un color que no tiene ninguno de sus vecinos, pintemos a *p* de ese color y el resultado es una 6 coloración de *M*.

Pudimos proceder por inducción gracias a que sabíamos que siempre podríamos inflar un país. Este argumento da una buena idea de porque una prueba por inducción sobre el número de países se complica, pues al agregar un país necesitamos la garantía de no tener que cambiar la coloración del resto del mapa, que es justo lo que nos proporciona el teorema de sólo 5 vecinos. Usando este ejemplo definamos dos conceptos que resultaron fundamentales para la demostración final del teorema de los 4 colores:

Definición. Un mapa M es un ***n criminal mínimo***, si todos los mapas con menos países que *M* se pueden colorear con *n* colores y *M* no se puede colorear con *n* colores.

[1] El teorema de Euler dice que para una grafica plana la cantidad V+C-A es constante y que su valor es siempre 2. Hay generalizaciones donde la constante cambia, por ejemplo, para un toro con *n* hoyos esta cantidad también es constante, pero su valor resulta ser *2-2n*.

Definición. Decimos que una configuración es ***n reducible*** si no hay un *n* criminal mínimo que la contenga (en el ejemplo anterior, tener un pentágono es una configuración 6 reducible).

Definición. Un conjunto de configuraciones es ***inevitable*** si cualquier mapa debe tener al menos una de las configuraciones del conjunto.
Por ejemplo, el "teorema de sólo 5 vecinos" demuestra que el siguiente es un conjunto ***inevitable*** de configuraciones:


Fig. 3

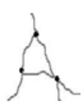
Fig. 4

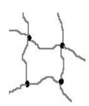
Fig. 5

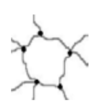
Fig. 6

Estamos ahora en condiciones de discutir la prueba del teorema de los 4 colores.

Podrán darse cuenta que la forma en que resolvimos el teorema de los 6 colores fue la siguiente: encontramos un conjunto inevitable de configuraciones 6 reducibles, así, procediendo por inducción podríamos colorear todos los mapas. La forma en que se atacó sistemáticamente el problema de los 4 colores fue precisamente ésta: encontrar un conjunto inevitable de configuraciones 4 reducibles, claramente un dígono y un triángulo son configuraciones 4 reducibles (aplíquese el argumento del teorema de los 6 colores). En 1879 Alfred Kempe, un inglés quien en sus años de estudiante fue discípulo de Arthur Cayley en el Trinity College, Cambridge, demostró que contener un cuadrado es una configuración 4 reducible (esto lleva a un "Teorema de los 5 colores", con una prueba muy elemental y corta que el lector interesado puede encontrar en libros de teoría de gráficas) usando un argumento que ahora se conoce como "cadenas de Kempe". Extendió su método para el pentágono, llegando a una demostración del "Teorema de los 4 colores". La prueba fue considerada como definitiva por 11 años, hasta que un error en el argumento fue encontrado por Heawood.

Muchos años pasaron durante los cuales hubo progreso tanto en encontrar conjuntos inevitables como en demostrar que ciertas configuraciones eran 4 reducibles. En el ataque final (usando ideas de muchas personas, entre ellas David Birkhoff) se demostró que un conjunto de 1482 configuraciones era inevitable y usando una computadora se analizaron más de 100 000 casos para demostrar que cada una de dichas configuraciones era reducible. Cuando la prueba fue publicada la comunidad matemática la recibió de manera fría y escéptica, muchas personas se negaban (niegan) a considerarla una demostración definitiva, pues no hay ningún humano que la pueda verificar paso a paso. Cuando la prueba fue publicada los matemáticos se dividieron básicamente en 2 grupos: los de más de 40 años, que no podían creer que una prueba por computadora fuera correcta, y los de menos de 40 años, que no podían creer que una prueba con 700 hojas de cálculos hechos a mano fuera correcta. Estas 700 hojas se deben a que la prueba está en 2 partes: en la primera se demuestra que las 1482 configuraciones son inevitables. En la segunda donde se demuestra que son 4 reducibles, la demostración de la inevitabilidad de las 1482 configuraciones esta hecha a mano y lleva 700 hojas de calculo manual. Actualmente hay versiones corregidas que en lugar de 1482 configuraciones usan alrededor de 650 y pueden ser revisadas en cualquier PC en alrededor de 3 horas.

Es interesante hacer notar que gracias al teorema de compacidad para lógica de primer orden, se puede demostrar que cualquier mapa finito es n coloreable tiene como consecuencia que cualquier mapa infinito sea n coloreable.

Coloraciones en otras superficies:
Analicemos mapas en un toro (una dona): las características de esta superficie permiten mayor "conectividad" entre los países, por lo cual se espera necesitar más de 4 colores para colorear mapas en el toro. Antes de avanzar invito al lector a intentar construir mapas que necesiten más de 4 colores.

Empecemos como con el plano:

Teorema de los 6 vecinos: En cualquier mapa sobre un toro hay un país con a lo más 6 vecinos.
Demostración: Sean V, C y A dadas de la manera anterior, suponemos que todos los países tienen al menos 7 vecinos tendríamos que $7C<=2$; además $3V<=2A$ (todo esto es análogo a lo hecho para el plano), entonces tendríamos:
$0=V+C-A>=2/7A+2/3A-A=-1/21A$ lo cual nos llevaría a una contradicción.

Una vez establecido el *teorema de los "sólo 6 vecinos"* es fácil demostrar que 7 colores bastan para colorear cualquier mapa usando un argumento idéntico al del plano.

La única diferencia es que en este caso sí podemos hacer un mapa que necesite los 7 colores. En la figura siguiente péguense primero los lados largos en la dirección de las flechas y después gírese un poco para pegar los dos puntos marcados en la figura:

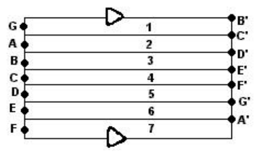

Fig. 7

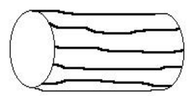

Fig. 8

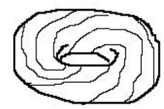

Fig. 9

Aquí todos los países son vecinos de todos, por lo tanto necesitamos 7 colores, estableciendo así el siguiente teorema:

Teorema: Todo mapa en el toro es 7 coloreable y ésta es la mejor cota posible.

Heawood demostró (usando un argumento muy similar, que el lector puede encontrar en numerosos textos de teoría de gráficas o ¡intentar encontrar por sí solo!) que en un toro con *h* hoyos bastan [1/2(7 + raiz(1+48h))] colores para colorearlo. El problema fue que no demostró que eran necesarios, argumentando que "para superficies altamente conectadas, se observa que generalmente hay suficientes contactos y de sobra, para que haya el anterior número de divisiones mutuamente vecinas", pero falló en dar una demostración de esto y no pudo darse cuenta del hueco en su prueba (él, que fue quien encontró el error después de 11 años en el argumento de Kempe para el teorema de los 4 colores). Finalmente en 1968 Gerhard Ringel y Ted Youngs demostraron la necesidad de ese número de colores para cualquier toro con *h* hoyos.

Como último comentario cabe aclarar que la última fórmula es válida (en su forma original, por Heawood, Ringel y Youngs) sólo cuando $h>=1$. La demostración de Haken y Apple agregaría el caso $h=0$ a la fórmula.

**Imágenes de B.Z. Leonard*