e y la trascendencia

Olmo Ignacio Barragán Córdova
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM.
olmogorov@yahoo.com.mx

¿Qué es un número trascendente?

Para nuestro propósito dividiremos a los números reales en dos clases de números: **algebraicos** y **trascendentes**. Los números reales trascendentes se definen por oposición o contraste a los algebraicos, es decir, un número real es trascendente si no es algebraico. Por otra parte, un número es algebraico si es solución de la siguiente ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

para algunos . En otras palabras, los números algebraicos son aquellos que son raíces de polinomios con coeficientes enteros donde el término independiente (a_0) no necesariamente es diferente de cero.

Es fácil dar ejemplos de números algebraicos, por ejemplo, los números con que contamos (números naturales), sus negativos, las fracciones, etc. Pero un número algebraico puede también tener una forma muy complicada, por ejemplo:

$$\frac{5}{4}\sqrt[71]{\sqrt{10-3\sqrt{9-\sqrt{\tfrac{1}{7}+\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{\tfrac{11}{57}-\sqrt[7]{8}}}}-\sqrt[6]{20+\sqrt{7}}.$$

Breve Reseña Histórica

En el siglo XVIII no se realizó un esfuerzo real para aclarar el concepto de número irracional aunque se hicieron algunos progresos. Alrededor de 1737 Leonhard Euler mostró que los números e y e^2 son irracionales mientras que Johann Lambert, motivado por encontrar la cuadratura del círculo, hizo lo propio con Π. Sin embargo no sería sino hasta finales del siglo XIX que se demostrara que dichos números son trascendentes. Los números trascendentes no pueden ser vistos como raíces de polinomios de coeficientes enteros cuyo término libre se puede suponer distinto de cero y fueron llamados así por Euler quien dijo: “ellos trascienden el poder de los métodos algebraicos”.

La distinción entre números algebraicos (entre los cuales, reiterando, están todos los racionales y algunos irracionales) y trascendentales fue claramente reconocida por Euler en 1744. Conjeturó que el logaritmo en una base racional de un número racional debía ser racional o ¡trascendente! Sin embargo en su época no se logró mostrar que existían números trascendentales. Así, este problema permaneció abierto sin respuesta por alrededor de un siglo.

A finales del siglo XVIII, en distintos trabajos donde se necesitaba la resolución de ecuaciones, se reveló que no todos los números algebraicos irracionales se podrían obtener con operaciones algebraicas en números racionales. Esto renovó el interés por saber si existían números trascendentes. Así el problema de si e o Π eran trascendentes o algebraicos continuaba atrayendo a los matemáticos.

El problema de la existencia de los números trascendentes fue finalmente resuelto en 1844 por Joseph Liouville, quien mostró que los números de la forma

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots,$$

donde los a_i, con i = 1, 2, ... son arbitrariamente enteros entre 0 y 9, son trascendentes. Liouville también mostró criterios más generales para encontrar números trascendentes pero aún no resolvió el problema de si Π o e son trascendentes.

La trascendencia de e fue probada por Charles Hermite en 1873. Pero Hermite desistió del intento de probar la trascendencia de Π. Sin embargo, posteriormente Ferdinand Lindemann utilizando un argumento en esencia idéntico al que Hermite usó para mostrar la trascendencia de e, mostró en 1882 que Π también era trascendente. La prueba de que Π es trascendente puso fin a uno de los problemas más famosos de construcción geométrica.

Actualmente se sigue desconociendo la trascendencia de algunas constantes famosas. La más relevante de ellas es un número muy útil en el estudio de algunas funciones muy importantes en el análisis matemático: la afamada γ de Euler. Este número se define como:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}+\log n\right).$$

y se ha conjeturado que se trata de un número trascendente, pero los laureles aún esperan a quien resuelva este problema.

$$\gamma\approx 0.577216$$

Recordemos ¿Qué es *e*?

El primer estudio sistemático del número e, junto con el número Π, se divulga en 1748 con la publicación de *Introductio in Analysin Infinitorum* del prominente matemático Euler. En ese libro por primera vez se muestra cómo una *suma infinita* que crece monótonamente se puede usar para definir un nuevo número real.

Para definir al número e utilizando, precisamente, una suma infinita es necesario introducir antes el concepto del factorial de un número. Se denota al factorial del número natural n como $n!$ y se calcula de la siguiente manera:

$$n!=n\cdot(n-1)!=\cdots=n\cdot(n-1)\cdots 1\cdot 0!,$$

donde por convención 0! = 1. Por ejemplo, si pretendemos calcular n con n = 5 tendríamos que:

$$5!=5\cdot 4!=\cdots=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0!=120.$$

Podemos notar inmediatamente que

$$2^n<n!$$

cuando

$$n>3$$

Veamos la elemental prueba de este hecho. La demostración se hace por una técnica muy usual: la inducción matemática[1]. Caso base o paso 1: n = 4,

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

Para hacer inducción suponemos que el resultado es cierto para $n = m$, hay que usar como hipótesis que $2^m < m!$ y probar que $2^{m+1} < (m+1)!$ Mostremos entonces esto último:

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m < 2 \cdot m! < (m+1) \cdot m! = (m+1)!$$

dado que

$$2 < 3 < m$$

. Habiendo así introducido el concepto del factorial de un número estamos listos para definir al número e o constante de Euler de la siguiente manera:

$$e = \tfrac{1}{0!} + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \cdots$$

Como sabemos que $2n < n!$ para

$$n \geq 4$$

podemos estimar el valor de e para asegurar que la suma que lo define no sea igual a infinito.

Procediendo a efectuar dicha estimación tenemos que por una parte,

$$1 + 1 + \tfrac{1}{2} = 2.5 < e$$

Además:

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + 1/6 + \textstyle\sum_{n=4}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + 1/6 + \textstyle\sum_{n=4}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \\ &= 1 + 1 + 1/6 + \tfrac{1}{2^4} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \\ &= 1 + 1 + 1/6 + \tfrac{1}{2^4} \cdot 2 = 2.792 \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto, que $2.5 < e < 2.792$ de donde resulta que e es distinto que infinito. Ahora que ya sabemos qué es e mostremos que no es un número racional, esto es que no lo podemos escribir como una fracción p/q, donde p y q son números enteros.

Proposición: e es irracional.

Prueba:

Primero estimemos el valor de $(e - S_m)$, donde

$$S_m = \textstyle\sum_{n=0}^{m} \tfrac{1}{n!} = 1 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots \tfrac{1}{m!}$$

$$\begin{aligned} e - S_m &= \tfrac{1}{(m+1)!} + \tfrac{1}{(m+2)!} + \cdots \\ &< \tfrac{1}{(m+1)!} \left[\tfrac{1}{m+1} + \tfrac{1}{(m+1)^2} + \cdots \right] \\ &= \tfrac{1}{(m+1)!} \tfrac{m+1}{m} = \tfrac{1}{m!m}. \end{aligned}$$

Como $e > S_m$ se tiene que

$$0 < e - S_m < \tfrac{1}{m!m}$$

Supongamos que e es racional, entonces $e = p/q$ donde . Luego $q!e$ y $q!S_q$ son enteros pero por la estimación realizada $0 < q!(e - S_q) < 1/q < 1$. Esto implica que hay un entero entre 0 y 1, lo cual es una contradicción.

Se expondrán a continuación algunos de los puntos más importantes utilizados en la demostración simplificada de David Hilbert de que e es un número trascendente para presentar, posteriormente, un esbozo de ella. En esta demostración se emplea una función conocida como la *función gama*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

,

por brevedad sólo se presentarán y comentarán algunas de las propiedades de esta interesante función.

Proposición. (Propiedades de la función Gama.)

(a) $\Gamma(\cdot)$ es continua.

(b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) $\Gamma(n+1) = n!$, para $n = 1,2,3,\ldots$ y $\Gamma(1) = 1$.

(d) $\log \Gamma(\cdot)$ es convexa en $(0,\infty)$.

Para probar la proposición anterior se requieren tres lemas: El primer Lema nos dice: *"Si $f(x,t)$ es continua en x_0 entonces*

$$F(x) = \int_a^\infty f(x,t) dt$$

es continua siempre que la integral exista". Dicho Lema se usa para mostrar el inciso (a) de la proposición. Habría que ver primero que la integral que define a es un número real (finito desde luego) para cada x que consideremos. El segundo lema que necesitamos es el que indica cuándo podemos extender el teorema de integración por partes para las integrales impropias. Esto es cuando el intervalo de integración no está acotado. Este lema se emplearía para mostrar la parte (b) la cual implica al inciso (c). El tercero y último lema es la importantísima desigualdad de Hölder. Aunque enunciarla como lema (debido a que en esta demostración sólo se usa para mostrar el inciso (d)) le resta importancia, esta desigualdad tiene una vasta cantidad de aplicaciones.

La desigualdad de Hölder (Para la integral de Riemann).

Sea un intervalo real no necesariamente acotado.

$$(\alpha, \beta)$$

Si

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx$$

y

$$\int_\alpha^\beta |g(x)|^q \, dx$$

existen, donde

$$0 < p < \infty \quad \text{y}$$

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1$$

. Entonces

$$\int_\alpha^\beta |(f \cdot g)(x)| \, dx$$

existe y además

$$\int_\alpha^\beta |(f \cdot g)(x)| dx \le \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Finalmente, antes de dar el bosquejo de cómo sería la prueba de la trascendencia de *e*, hagamos un comentario sobre la propiedad de gamma tratada en el inciso (d).

Decimos que una función f es convexa si para cada pareja *x,y* en el dominio de f se tiene que

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

, donde

$$0 \le \lambda \le 1$$

Si una función es log-convexa entonces es muy suave, esto es que se puede derivar tantas veces se quiera y la derivada resultará continua.

Enunciemos entonces el teorema de la trascendencia del número e y esbocemos su prueba.

Teorema: e es trascendente

La prueba se hace por contradicción, esto es, se postula que e no es trascendente y se llega a una incoherencia.

Si suponemos que e no es trascendente entonces existe un polinomio tal que

$$a_n e^n + \cdots a_1 e + a_0 = 0, a_0 \ne 0 \qquad (*)$$

para algunos enteros $a_0,...a_n$. Lo que se hace ahora es aproximar de manera simultánea a $e, e^2,...,e^n$ por racionales y números pequeños. De tal manera que $M, M_1,...,M_k$ son enteros y son números pequeños, tales que

$$e = \tfrac{M_1 + \epsilon_1}{M}, e^2 = \tfrac{M_2 + \epsilon_2}{M}, \ldots e^n = \tfrac{M_n + \epsilon_n}{M}$$

Sustituyendo estos valores en (*), multiplicando por M y agrupando términos obtenemos que

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [\epsilon_1 a_1 + \cdots + \epsilon_n a_n] = 0. \qquad (**)$$

La contradicción se va a obtener porque se escoge M suficientemente grande, tal que el primer sumando entre corchetes en (**) es no cero y por otra parte se puede elegir a

$$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$$

tan pequeñas que

$$|\in_1 a_1 + \cdots + \in_n a_n| < 1$$

por lo cual la suma (**) no puede ser cero.

La idea de la prueba es muy directa. Si algún lector está interesado en leerla puede consultar [S] o en su defecto escribirme para pedirme la versión completa del texto que incluye tanto esta prueba como las pruebas de la proposición de las propiedades de y de los lemas en que se apoya tal demostración.

Bibliografía

[B] Robert G. Bartle. *The Elements of integration and Lebesgue Measure.* Oxford University Press. USA c1996.

[C] Richard Courant. *What is mathematics?* Oxford University Press. USA c1996..

[K] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press. USA c1972.

[KF] Kolmogorov & Fomin. *Introductory Real Analysis.* Dover. USA c1970.

[R] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition. McGraw-Hill International Editions. USA c1976.

[S] Michael Spivak. *Calculus.* Publish or Perish Inc. USA c1980.